全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答

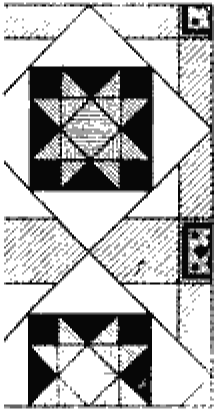
Problems & Solutions
From the Mathematical Competitions in
the 1st to the 8th National Students Summer Camp

■ 许以超 陆柱家 编著

▲ 著名数学家王元、杨乐作序推荐
▲ 中国科学院数学研究所专家编写
▲ 中国高等学校数学顶尖高手悉数参加
▲ 历届获奖者已成为崭露头角的青年数学家

哈尔滨工业大学出版社

■ 著名数学家王元、杨乐作序推荐



全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答

Problems & Solutions

From the Mathematical Competitions in

the 1st to the 8th National Students Summer Camp

■ 许以超 陆柱家 编著

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答/许以超主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.3

ISBN 978-7-5603-2484-5

Ⅰ.全…　Ⅱ.许…　Ⅲ.高等数学-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 028199 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　刘培杰
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 15　字数 249 千字
版　　次　2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2484-5
印　　数　1～3 000 册
定　　价　28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎序——往事追忆

在由中国科学院数学研究所两位研究员主持编写的《全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答》一书正式出版之际，编者及哈尔滨工业大学出版社要我写几句话，这引起了我对20年前往事的一些回忆.

我是1984年2月18日被正式任命为数学研究所所长的，于1988年卸任.我们的领导班子实际上由4个人组成：副所长杨乐，党委书记前后有吴云，孙耿，李文林，另外王光寅亦参与重大事情的讨论与决定.集体决定的事情由我出面宣布，领导班子很团结.那时，虽然文化大革命已结束了多年，但“左”的影响仍在.科研工作怎么恢复？如何搞？这是摆在所领导面前的首要任务.按理讲，数学所应该办成一个面向国内外的开放型研究所.这个想法很自然地成为所领导的共识.实际上，世界上的数学所，基本上都是开放型的.1952年，数学所建所时就是开放型的.20世纪60年代，更招收了大批国内进修教师.现在所谓开放只是恢复一下过去的做法而已.数学所领导班子的想法得到科学院领导，特别是时任院长周光召的大力支持，科学院给数学所增拨了经费支持开放.这样，数学所就正式对外开放了.

作为数学所的开放举措有如下措施：其一为面向全国高校，招收一批进修教师.这一举措在1958年曾实行过，我们所为高校培养了一批数学骨干.另一举措为每年举办一项数学中心年，第一年(1985)就是由我主持的“代数解析数论年”.可惜这个方

向未能在我国长期开展下去.再一个举措就是举办"全国大学生数学夏令营",着力于培养年轻数学家.这项工作得到了高校的热烈欢迎.数学所的同事也热情参与.通过夏令营,参加者听了学术普及报告,参观了首都的名胜古迹.最重要的是参加数学竞赛.夏令营的整个气氛是火热的.时间虽然只有一周,我知道这些学生普遍对数学所产生了深厚的感情,他们自己也有自豪感,这确实使年轻人终生难忘啊!

但为什么搞了几年就停止了呢?我想主要原因也许是到了1996年,全国的改革开放程度已大幅度地提高了.可供交流的地方与活动也逐步加多了.特别是对国外的交流也由几个大城市与著名研究所、高校拓展至一些中小城市与普通高校.这就是说我国数学研究逐步由少数中心向多个中心转化.当然数学所的领导作用与中心作用亦会逐渐改变.在这样的形势下,夏令营的任务,甚至整个所的开放形式也可以告一段落了,因此夏令营很自然地结束了,大家并不感到突然.

夏令营的重点当然是数学竞赛,感谢许以超与陆柱家是"有心人",为我们留下了一份完整的材料,包括参加者个人与单位名单,试题与解答及优胜者.可惜当时学术报告的资料,一点没能留下.我记得我在好几届都作过学术报告,现在连报告题目都想不起来了.这就更显出这本书的宝贵了.我认为其真正价值在于其史料性质,从中可以看到一个研究所从被"四人帮"破坏得体无完肤到走上改革开放的康庄大道路途中的一段.回顾过去,我们更珍惜来之不易的今天和明天.

王　元

2006年11月

◎ 原序

20世纪70年代末期以来，我国实行改革开放政策，数学研究与教育工作有了迅速发展．一批优秀的青年人才成长起来，然而其中不少人在海外发展，显露身手．近几年来，国内经济转轨，数学等基础研究对青年人的吸引力减小，我国数学界仍然面临着培养和造就一大批优秀的青年数学人才的重要任务．

优秀的数学人才应该有较全面的数学基础与训练，有扎实的功底；对所从事的学科与相关领域有较全面的了解与掌握；有广阔的视野与远大的目标，并逐步形成自己的学术思想与风格．一般说来，具备了这些素质的学者才可能做出高水平的研究工作，在国际上有关领域中发挥影响．

为了造就青年人才，中国科学院数学研究所一直认真做好培养硕士生、博士生和博士后的工作．从1987年开始，数学所又采取了一项重大举措：每年举办全国数学系大学生的夏令营．我们约请国内一些主要大学的数学系选送高年级的优秀学生，会聚到北京，度过一周的夏令营．在夏令营期间，组织高水平的学者为同学们作学术报告，介绍一些学科领域的发展与动态；举行座谈会，讨论与回答同学们普遍关心的问题；进行同学能力的测试等．此外，还组织同学们游览首都的名胜古迹．

数学所不少同志参与了每年对夏令营测试的命题、阅卷与评分等项工作．现在，许以超和陆柱家两位教授对历届夏令营的测试题目及其解答作了编辑与整理加工，印成此书，奉献给读者．

我们衷心希望它对于全国的大学生、研究生学习数学有所帮助.

如果把这本书作为一本题解,就失去了它应有的意义.在参考这本书时,希望同学们要勤于动脑,使思路更加活跃,将学习引向深入,把学习与研究逐步结合起来.同时又希望同学们勤于动手,做做比课堂上稍许困难一些的问题,自己认真推导、演算,逐步增强功力.

8年来,数学所举办的大学生夏令营得到了各大学数学系的热情支持与帮助.近两年,华晨集团十分关心这项活动,赞助了全部费用,仰融总裁及华晨集团主要领导还莅临了颁奖仪式.对此,我们表示衷心的感谢.

另外感谢徐叔贤教授和范同春先生组织了本书的出版,感谢朱世学先生为本书提供有关档案材料.而本书之打印工作,得力于王婵小姐,在此也表示衷心的感谢.

最后,让我们祝愿优秀的青年人才不断涌现!

杨　乐

1995年4月



王元，数学家，中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员。1930年4月30日出生于浙江省兰溪县，江苏省镇江市人。

1952年毕业于浙江大学数学系，经陈建功推荐到中国科学院数学研究所工作，在华罗庚指导下研究数论。曾任中国科学院数学研究所所长和中国数学会理事长。他与其合作者在经典解析数论，包括哥德巴赫猜想、近似分析与统计中的数论方法与丢番图分析方面共发表论文100余篇，专著5本，其中有些著作已成为该领域的基本文献。



杨乐，数学家，中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员。1939年11月生于江苏省南通市。

杨乐院士在函数值分布论、辐角分布论、正规族等方面取得了一系列的重要研究成果。(一)在亚纯函数与其导数的总亏量方面获得几个精确结果，回答了著名专家D.Drasin提出的三个问题，首先证明了亏函数的可数性。(二)在函数正规族理论中，研究了不动点、微分多项式的取值与正规性的关系。(三)他与张广厚首次揭示了整函数与亚纯函数的亏值数目与Borel方向数目间的紧密联系，获得了最佳估计。(四)获得了亚纯函数Borel方向的分布规律，对奇异方向在涉及导数与重值时作了深入研究。他还和W. K. Hayman合作研究了Littlewood的一个猜想，他获得了亚纯函数在涉及重值时普遍与精确的亏量关系。

杨乐院士在复分析中的研究工作为国内外同行学者广泛引用。他曾应邀在20次国际会议上做主要或邀请演讲，在国际上60余所著名大学做学术演讲，其英文专著由Springer-Verlag与科学出版社出版。他曾获全国科学大会奖、国家自然科学奖、国家科技进步奖、华罗庚数学奖、陈嘉庚数理科学奖、何梁何利奖与国家图书奖等。



许以超，1933年10月出生于浙江省杭州市，中国科学院数学与系统科学研究院研究员。

1952年从上海市敬业中学毕业后以优异成绩考入北京大学数学力学系。大学四年级时他选入代数专门化学习，经段学复、聂灵沼和丁石孙等老师的指导，在特征 $p>0$ 域上单李代数方面做出了两篇很优秀的学术论文。其中一篇发表在《北京大学学报》上；另一篇在送审时发现与当时刚到的Trans. Amer. Math. Soc.上R.Ree的博士论文结果相同，因此没有发表。1956年许以超从北京大学毕业，分配到中国科学院数学研究所工作。1957年初，他以总分第一的成绩被录取为华罗庚的研究生。此后不久他与陈景润被定为数学所的“白旗”。1959年华罗庚要求许以超改为多复变函数论的研究生。此后，许以超的工作主要在多复变函数论和代数方面，共发表了40余篇论文，出版专著6本。他在复齐性有界域方面的工作跻身国际前列。他曾是中国数学会理事；还是中国数学奥林匹克委员会委员，中国数学奥林匹克高级教练，国家级教练，为我国中学生在国际数学奥林匹克竞赛中取得优异成绩作出了不可磨灭的贡献。



陆柱家，1943年6月出生于上海，中国科学院数学与系统科学研究院研究员。

1960年从上海市卢湾中学毕业后考入中国科学技术大学，1965年毕业于中国科学技术大学数学系，同年分配到中国科学院数学研究所工作。1982年至1984年公费派至美国伯克利加州大学数学系进修，为访问学者。1993年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。1995年3月起任中国科学院数学研究所业务处处长。1998年12月中国科学院数学与系统科学研究院成立后任该研究院科研处处长。

在国内外数学杂志上发表了20余篇研究论文（包括与人合作的）。曾任国家图书馆第一届、第二届和第三届专家咨询委员会委员，全国自然科学名词审定委员会数学名词审定委员会委员，北京市数学会常务理事，学术委员会主任，中国科学院数学与系统科学研究院主办的杂志《数学译林》的责任编委，美国《数学评论(Mathematical Reviews)》评论员，是中国数学会会员，美国数学会会员，现任《数学译林》副主编，北京市数学会理事。

目录

全国大学生数学夏令营情况简介……1
第一至八届全国大学生数学夏令营参加者名单……2
第一至八届全国大学生数学夏令营获奖团体名单……9
第一至八届全国大学生数学夏令营获奖个人名单……10
第一至八届全国大学生数学夏令营数学竞赛试题……12
第一至八届全国大学生数学夏令营数学竞赛试题解答……26
编者说明……26
第一届试题解答……27
第二届试题解答……41
第三届试题解答……76
第四届试题解答……102
第五届试题解答……120
第六届试题解答……151
第七届试题解答……176
第八届试题解答……198
编辑手记……229

全国大学生数学夏令营情况简介

从 1987 年夏天开始，中国科学院数学 (开放) 研究所每年夏天都举办全国大学生数学夏令营．时间及参加学校数和人数分别为：

第一届： 1987 年 7 月
　　16 所高等学校数学系的 19 位同学

第二届： 1988 年 7 月 22 日— 7 月 29 日
　　18 所高等学校数学系的 30 位同学

第三届： 1989 年 7 月 18 日 — 7 月 24 日
　　15 所高等学校数学系的 28 位同学

第四届： 1990 年 7 月 30 日— 8 月 5 日
　　19 所高等学校数学系的 41 位同学

第五届： 1991 年 7 月 29 日— 8 月 3 日
　　18 所高等学校数学系的 39 位同学

第六届： 1992 年
　　20 所高等学校数学系的 35 位同学

第七届： 1993 年 7 月 19 日— 7 月 24 日
　　20 所高等学校数学系的 48 位同学

第八届： 1994 年 7 月 20 日— 7 月 25 日
　　25 所高等学校数学系的 40 位同学

总的来说，学校数趋于上升，但总人数由于经费关系 (提供学生来回路费及在北京之住宿，伙食费用)，只能限于 40 人左右．

夏令营的主要内容为： (1) 组织一批通俗报告，介绍数学的历史，方法和意义，报告人为在中国科学院数学研究所工作及兼职的院士及知名学者等； (2) 举行一次数学竞赛 (除第一、四届外均分两个半天进行)，出题及改卷、评分均由命题小组负责，做到严格保密和评分公正合理； (3) 组织游览北京之名胜古迹．

最后在闭幕式上公布数学竞赛团体赛之名次及个人名次．并颁发团体赛奖杯、奖状和个人赛奖杯、奖状和奖品．近两期华晨集团赞助全部费用，颁发奖金．

第一至八届全国大学生数学夏令营
参加者名单

第一届

复旦大学	徐　宏　柳　春
山东大学	赵跃文
清华大学	李文连
四川大学	徐泽耘
华东师大	韩　晴
吉林大学	丛福仲
北京大学	杨　坚　余大洪
厦门大学	王作成
北京师范大学	崔显峰
华中工学院	何汝华
中山大学	黄志洪
南京大学	方冰飘
杭州大学	胡能庆
中国科大	袁进勇　李　彤
武汉大学	胡晓东
浙江大学	滕文峰

第二届

北京大学	林斯建　荆　秦　方为民　白学政
厦门大学	王　飚　阙兆先
西北大学	雷旭冒
中山大学	郝志峰
中国科大	江　彬　王伟强　段　云

复旦大学	陈九华　徐 卫　洪剑峭
武汉大学	扶 磊　魏军城　吴 军
山东大学	孙承杰
杭州大学	史宇光　陈 坚
南京大学	俞 斌　俞德明
清华大学	詹 毅　黄 颖
华东师范大学	李新松　吴新文
吉林大学	张 影　李胜男
浙江大学	马 晖
湘潭大学	王晓辉

第三届

杭州大学	顾永跟　史宇光
宁波大学	曾冬极
复旦大学	张 浩　周 欣　张 冀
中国科大	杨 庆　段 云　肖才群
浙江大学	侯春海
武汉大学	周小方　叶 东
山东大学	李成军　崔明荣
湘潭大学	李亚柱　李耀星
华东师范大学	王百灵　蒋龙根
北京师范大学	姚晓东　杨华勇
四川大学	孙 平　陈世平
清华大学	曾 峰　高 飚
南京大学	宋裕庆　刘建明
西北大学	刘红卫
郑州大学	邵 振

第四届

清华大学	项　阳　王培勇　金为民　曾　荣　王晓峰
复旦大学	卢　红　倪　磊　董　昕
北京师范大学	吴　江　彭秋良
南京大学	杨振华　张　平
四川大学	夏璧灿　黄立新
湘潭大学	刘献军　喻祖国
吉林大学	林　群　王宏林
厦门大学	陈久昌　严荣沐
北京大学	张　立　钟世栋　张　宇
郑州大学	文剑钧
中山大学	罗方屹　刘小清
兰州大学	刘晓明
杭州大学	王建军　俞新华
浙江大学	陈凌钧　王　卫
中国科大	林　强　徐文青　何建勋
内蒙古大学	谢玫英
武汉大学	姚家燕　钱国祥
华东师范大学	吕益群　周　超
上海交通大学	韩　冰
北京师范大学	李为东

第五届

北京师范大学	胡海潮　兰志凌
清华大学	金为民　曾　荣
(旁听)	杭凤波　王晓东　莫　群　鲁　勇
南京大学	沈启庆　王玉龙

北京大学	于凤春	罗小奎	雷　悦	
华东师范大学	丁　军	杨忠林		
上海交通大学	姚　勋			
四川大学	蔡　雷	陈国华		
中山大学	朱会灿	黄宁宇		
复旦大学	钱春江	纪　林	孙胜利	
浙江大学	周玉梅	曾德超		
杭州大学	沈永良	赖丁宙		
武汉大学	兰忠丹	郑　晖		
西北大学	韩小西			
兰州大学	卢旭起			
湘潭大学	李先利			
厦门大学	陈　铬	詹维娟		
中国科大	吕金波	王建伟	曾冬林	
吉林大学	邹志强	綦征宇		

第六届

清华大学	杭凤波	王晓东	李　争	刘宁平
复旦大学	吴晓晖	丁　立	吴小明	
浙江大学	戴欣荣	宋胜火		
山东大学	王　谦			
北京师范大学	喻　梅	高家富		
四川大学	田　野	李榴波		
大连理工大学	李纪迭			
西北大学	刘　勇			
湘潭大学	向开南			
苏州大学	戴　民			

吉林大学	王绍立		
中山大学	谢贤德		
华东师范大学	胡　峻	曾晓东	
武汉大学	葛宇新	张云志	孙建华
厦门大学	陈雄达		
中国科大	沈建红	闫晓东	王新茂
南京大学	沈隽皓	纪　辉	
杭州大学	缪永伟	王衡庚	
兰州大学	张晓武		
陕西师大	孙　涛		

第七届

北京大学	孙　健	林甲富	周　健
复旦大学	张　毅	刘　进	张健平
内蒙古大学	王同军		
苏州大学	李天成		
湖南大学	武连文		
大连理工大学	陈肖军		
上海交通大学	任庆生		
华东师范大学	黄智猛		
湘潭大学	王德生		
吉林大学	金祥意		
中山大学	丘小峰	吴向平	
郑州大学	宋东卫		
南京大学	任维清	方　俭	
南京师范大学	戴双华		
南开大学	王炳武	曾崇纯	

中科大少	倪铁龙	刘湘伟	梅加强
杭州大学	林　钦		
厦门大学	汪力新		
西北大学	张　鹏		
山西大学	李永金		
贵州大学	王绍恒		
浙江大学	郑文隽	陈　勇	
北京理工大学	李海珠	王志良	
清华大学	莫　群	刘宁平	包志强
列席（清华大学）	胡　刚	钟元智	
首都师范大学	何卫力	赵　岚	
北京师范大学	胡永建	陈炳树	
武汉大学	李洪金	左正平	
中国科大	沈维孝	吴耀琨	张远声

第八届

复旦大学	黄　昆	王安泰	张建丰
内蒙古大学	梁志刚		
苏州大学	杨　凌		
湖南大学	李蕴琳		
上海交通大学	李　骏		
华东师范大学	陈　琦		
湘潭大学	陈　新		
吉林大学	刘　攀		
中山大学	章绍辉	李旭成	
郑州大学	李宏伟		
南京大学	江　宁		

南京师范大学	戴双华		
南开大学	崔　波	朱朝锋	
中科大少	刘湘伟	倪铁龙	梅加强
杭州大学	项　军		
厦门大学	王洪波		
西北大学	胡永利		
山西大学	王军民		
贵州大学	胡支军		
浙江大学	刘新国	阮火军	
武汉大学	王小强	方　平	
中国科大	何斯迈	黄应平	沈维孝
北京大学	宋惠明	臧立峰	李　韶
北京理工大学	毕金波		
清华大学	乔　岩	刘宁平	
北京师范大学	葛永超	刘新利	
北京大学	宋惠明	臧立峰	李　韶
北京理工大学	毕金波		
清华大学	乔　岩	刘宁平	
北京师范大学	葛永超	刘新利	

注：中国科大 = 中国科学技术大学
　　中科大少 = 中国科学科技大学少年班

第一至八届全国大学生数学夏令营
获奖团体名单

第一届 没有设奖

第二届

第一名 北京大学

第二名 武汉大学

第三名 中国科大

第四名 湘潭大学

第五名 复旦大学

第六名 清华大学

第三届

第一名 中国科大

第二名 武汉大学

第三名 复旦大学

第四名 杭州大学

第五名 北京师范大学

第四届

第一名 中国科大

第二名 复旦大学

第三名 武汉大学

第四名 北京大学

第五名 清华大学

第五届

第一名 武汉大学

第二名 清华大学

中国科大

第三名 北京大学

第六届

第一名 清华大学

第二名 武汉大学

四川大学

复旦大学

第七届

第一名 南开大学

第二名 中国科大

第三名 北京大学

第八届

第一名 南开大学

第二名 中科大少

第三名 中国科大

第一至八届全国大学生数学夏令营
获奖个人名单

第一届　没有设奖

第二届

第一名　魏军城　(武汉大学)

第二名　白学政　(北京大学)

第三名　段　云　(中国科大)

第四名　陈九华　(复旦大学)

第五名　方为民　(北京大学)

第三届

第一名　段　云　(中国科大)

第二名　杨　庆　(中国科大)

第三名　张　浩　(复旦大学)

第四名　叶　东　(武汉大学)

第五名　张　翼　(复旦大学)

第四届

第一名　钟世栋　(北京大学)

第二名　董　昕　(复旦大学)

第三名　姚家燕　(武汉大学)

第四名　吕益群　(华东师范大学)

第五名　徐文育　(中国科大)

第五届

第一名	罗小奎	(北京大学)	杭凤波	(清华大学)
第二名	郑　晖	(武汉大学)	兰忠丹	(武汉大学)
第三名	王建伟	(中国科大)	赖丁宙	(杭州大学)
	孔胜利	(复旦大学)		

第六届

第一名	杭凤波	(清华大学)	吴小明	(复旦大学)
第二名	王晓东	(清华大学)		
第三名	李福波	(四川大学)	葛宇新	(武汉大学)
	张云志	(武汉大学)		
鼓励奖	李　争	(清华大学)		

第七届

第一名	曾崇纯	(南开大学)		
第二名	张建平	(复旦大学)	吴耀琨	(中国科大)
第三名	孙　健	(北京大学)	周　健	(北京大学)
	王炳武	(南开大学)		

第八届

第一名	崔　波	(南开大学)		
第二名	刘湘伟	(中科大少)	张建丰	(复旦大学)
第三名	沈维孝	(中国科大)	何斯迈	(中国科大)
	梅加强	(中科大少)		

第一届全国大学生数学夏令营试题

(1987 年 7 月)

(3 小时完成，满分 100 分)

1. 求出所有在 $[0,\infty)$ 上的正值连续函数 $g(x)$，使得

$$\frac{1}{2}\int_0^x [g(t)]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2,\quad \forall x>0. \qquad (15分)$$

2. 设 A 为 n 阶实方阵. 试证： A 对称当且仅当 $AA' = A^2$. (15分)

3. 试证：函数 $f(u,v)=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-9/v\right)^2$ 在区域 $D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<u<\sqrt{2},\ v>0\right\}$ 中的最小值为 8. (15分)

4. 求下列方程的实根：

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,. \qquad (15分)$$

5. 设 $\varphi(\alpha,\alpha)$ 为线性空间 L 上的二次型，$L=L_1\oplus L_2$ 为两个低维子空间的直接和，φ 在 L_1 上正定，在 L_2 上负定. 试证：二次型 φ 的符号差为 $\dim L_1-\dim L_2$. (20分)

6. 设 P_1 为边长等于 1 的等边三角形，P_2 是由 P_1 之各边 3 等分点连成的六边形，$\ldots, P_{n+1}$ 是由 P_n 之各边 3 等分点连成的凸多边形. 试证 P_n 有 $3\cdot 2^{n-1}$ 条边，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Area}(P_n)$. (20分)

第二届全国大学生数学夏令营

(1988 年 7 月)

第一试试题

(4 小时内完成，满分 100 分)

1. 记 M_n 为所有 $n\times n$ 复系数方阵构成的复向量空间. 设 $X,Y\in M_n$，则 $Q(X,Y)=\operatorname{tr}(X\overline{Y})$ 是 M_n 上的 Hermite 二次型. 求 Q 的符号差 (即正本征根个数与负本征根个数之差).

(提示：找 Q 的极大正定子空间.) (10分)

2. 设 V 是 n 维复线性空间，u 是 V 到自身的复线性变换. 把数域从复数缩小到实数，则 V 成为 $2n$ 维实线性空间，记为 V_0. 这时 u 也可看作 V_0 到自身的实线性变换，记为 u_0. 求复数 $\det(u)$ 与实数 $\det(u_0)$ 之间的关系. (10分)

3. 求函数 $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ ($a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) 在超平面 $\sum_{i=1}^n b_i x = 1$ ($b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$) 上的最小值. (14分)

4. 设 $F(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二次连续可微函数. 已知 $F(x, y) = 0$ 的解 (x, y) 的集合是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 "8" 字形图形. 试问：方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有几组解？ (14分)

5. 设实系数多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于实值函数 $f(x)$, 试证 $f(x)$ 也是多项式. (12分)

6. 求出使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 及最小的数 β:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}. \qquad (15分)$$

7. 计算四重积分

$$\int_{Q(x) \leq 1} e^{Q(x)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4,$$

其中 $Q(x) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} x_i x_j$ 是正定的二次型. (15分)

8. 设 f, g 是在 $\mathbb{R}^3$ 的区域

$$D = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 2 \right\}$$

中二次连续可微的实函数，它们在球面

$$S^2 = \{ x \mid \|x\| = 1 \}$$

的 (中心) 对称点上值相等. 试证：向量场

$$\mathrm{grad}\,(f) \times \mathrm{grad}\,(g)$$

流进球面 S^2 的通量等于零. (10分)

第二试试题

(4 小时完成，满分 100 分)

1. (a) 证明有理点 (即 x, y 坐标都是有理数的点) 在 $\mathbb{R}^2$ 的圆周 $x^2+y^2=1$ 上处处稠密；

(b) 上述结论能否推广到单位球面 S^{n-1} $(n \geq 3)$ 上？能否推广到代数曲线 $P(x,y)=0$ 上？其中 P 是有理系数的多项式. (15分)

2. 单位球面 S^2 上任取 100 个大圆，它们最多把 S^2 分割成多少块？ (15分)

3. 证明或举例否定下列命题："任给自然数的严格增序列 $a_1, a_2, \ldots$，令 $b_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的最小公倍数)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 收敛." (15分)

4. 设实对称方阵 $A=(a_{ij})$ 的系数 a_{ij} 连续可微地依赖于参数 $t \in \mathbb{R}$，又设 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 的所有不同本征值 $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \cdots < \lambda_r(t)$ 的重数 $m_1, m_2, \ldots, m_r$ $(r \leq n)$ 是常数. 试证：$\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 t 的连续可微函数.

(提示：反函数定理.) (20分)

5. 设 $f(\theta)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的连续函数，且

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

试证：

(a)
$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

在单位圆盘

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}$$

内的紧子集上一致收敛于一个调和函数 $u(x,y)$，其中 $z = re^{i\theta} = x + iy$；

(b)
$$\iint_D \left(u_x^2 + u_y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
(20分)

6. 设 A 为 $n \times n$ 实方阵，试找出 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ 存在的充要条件. (15分)

第三届全国大学生数学夏令营

(1989 年 7 月)

第一试试题

(3 小时完成，满分 100 分)

1. 试求无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$$

的和. (16分)

2. 设实数序列 $\{a_n\}$ 满足

$$(2-a_n)a_{n+1}=1, \quad n=1,2,\ldots.$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且等于 1. (17分)

3. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续映射. 证明：如果存在 $a\in\mathbb{R}$ 和正数 C, 使得对所有正整数 n 成立 $|f^n(a)|\le C$, 则 f 有一不动点 x_0, 即 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$. 这里 $f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$ (n 个 f) 表示 f 的 n 次复合. (17分)

4. 设 L_1, L_2, L_3 是线性空间，$\alpha: L_1\to L_2$ 及 $\beta: L_2\to L_3$ 是线性映射. 试证:

$$\dim\alpha(L_1)+\dim\beta(L_2)\le\dim\beta(\alpha(L_1))+\dim L_2.$$

(提示：问题化为以下的矩阵形式：设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times p$ 矩阵. 要证：$\mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B)\le\mathrm{rk}(AB)+m$. 为此考虑矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & B \end{pmatrix}$.) (16分)

5. 设 A 为 n 阶方阵，$\det(\lambda I-A)=(\lambda-\mu_1)^{r_1}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\mu_s)^{r_s}$, 其中 $\mu_1,\ldots,\mu_s$ 为不同复数. 试证：存在 λ 的多项式 $f(\lambda)$, 使得对任意 j 有

$$(\lambda-\mu_j)^{r_j}\mid(f(\lambda)-\mu_j),$$

并以此证明 $f(A)$ 相似于对角方阵，而 $f(A)-A$ 为幂零方阵. (17分)

6. 给定 $n\times m$ 实矩阵 A 和 n 维实向量 a. 记 $\mathbb{R}^n$ 中原点到点集

$$\{\,Ax-a\mid x\in\mathbb{R}^m\,\}$$

之最短距离为 d. 试证：$d=|Ax_0-a|$, 其中 x_0 为方程组 $A'Ax=A'a$ 的解. (17分)

第二试试题

(3 小时完成，满分 100 分)

1. 试证：实方阵 A 对称当且仅当 $AA' = A^2$. (16分)

2. 设多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数 $\le n$, 关于 y 的次数 $\le m$. 设存在两组互不相同的数 a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ 和 b_j $(j=0,1,\ldots,m)$, 使得 $f(a_i,b_j)=0$, $i=0,1,\ldots,n$; $j=0,1,\ldots,m$. 试证 $f(x,y)\equiv 0$. (17分)

3. 设 $\mathcal{A}$ 为 n 维线性空间 L 上的幂零线性变换. 即存在自然数 N, 使 $\mathcal{A}^{N-1}\ne 0$, 而 $\mathcal{A}^N=0$. 试证：在 L 中存在一组基

$$\begin{array}{l}\alpha_1, \mathcal{A}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{A}^{N_1-1}(\alpha_1),\ (\mathcal{A}^{N_1}(\alpha_1)=0)\\ \quad\vdots\\ \alpha_s, \mathcal{A}(\alpha_s), \ldots, \mathcal{A}^{N_s-1}(\alpha_s),\ (\mathcal{A}^{N_s}(\alpha_s)=0)\end{array}$$

其中 $N_1,\ldots,N_s$ 为自然数.

(提示：先证 $\dim \mathcal{A}(L) < \dim L$, 再用第二数学归纳法.) (17分)

4. 试证明不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} < \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac{1}{2}},$$

其中 a 是任一正数. (16分)

5. 证明： $(n+1)$ 面体

$$A=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}} \le 1,\, x_i\ge 0,\, i=1,\ldots,n\right\}$$

的体积为

$$V_A=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^n}{\Gamma(\alpha n+1)},$$

其中 α 为正数， $\Gamma(t)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ 为 Euler 积分 Γ 函数.

(提示：利用公式

$$B(p,q)=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p>0,\ q>0.\Big)$$ (17分)

6. 设 S 是三维欧氏空间中的一个球帽. 试证：不存在从 S 到平面的保

距映射. 这里球帽上两点 A, B 之间的距离 $\rho(A,B)$ 是指通过这两点的劣大圆弧的长度.

(提示: 用一张平面在 S 上割出一个圆, 在该圆中找一个内接正方形.)

(17分)

第四届全国大学生数学夏令营

(1990 年 7 月)

试题

(3 小时完成, 满分 100 分)

1. 设 $(-\infty,\infty)$ 上二次可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$, 且 $|f''(x)| \le C|f(x)f'(x)|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 其中 C 为正常数. 试证: $f(x)\equiv 0$. (16分)

2. 设 A, B 为数域 P 上的两个 n 阶方阵, 满足 $AB=BA$, 且存在正整数 N 使得 $A^N=0$. 试证: $\det(A+B)=\det B$. (16分)

3. 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ 上的全纯函数, 在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)|\le 1$. 设 $z_0\in D$ 是 $f(z)$ 的一个 m 重零点, z_0 满足

$$|z_0| \le \frac{m-1}{m},$$

其中 m 是正整数, $m\ge 2$. 试证:

$$|f(-z_0)| < e^{-\frac{1}{2m}},$$

其中 e 为自然对数的底. (17分)

4. 在 n 维线性空间 V 中给定两组基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$. 试证: 存在 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$, 使得对任意 $j=1,2,\ldots,n$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n\}$ 是 V 的基. (17分)

5. 求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[e^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$, 或证明此极限不存在.

(17分)

6. 设 S 为一非空集合, $P(S)$ 表示 S 的幂集合, 即 S 的一切子集 (包括空集和 S 本身) 是 $P(S)$ 的全部元素. 令 f 是 $P(S)$ 到其自身的一个映射, 满足 $f(X)\supset f(Y)$, 若 $X\supset Y$. 试证: 存在 $A\in P(S)$, 使得 $f(A)=A$. (17分)

第五届全国大学生数学夏令营

（1991 年 7 月）

第一试试题

（3 小时完成，满分 100 分）

1. xOy 平面上有两个圆

$$C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1,\quad C_2:(x+2)^2+(y+2)^2=4.$$

求作一个在全平面连续，取值于 0 与 1 之间的函数 $f(x,y)$，使得 $f(x,y)$ 在圆 C_1 的内部取值 1，在圆 C_2 的内部取值零. (16分)

2. 能否求出最小正数 k，使得对任意 $x>0$, $y>0$, $z>0$，下列不等式成立：

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\le k\sqrt{x+y+z}\,. \qquad (16分)$$

3. 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在有理数点上取值为无理数，在无理数点上取值为有理数. 试证： f 不是连续函数. (17分)

4. 在三维欧氏空间中给定 n 个点 $A_1,\dots,A_n$；给定 n 个实数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，适合 $\sum_{i=1}^n\lambda_i\ne 0$. 试证：对任意点 Q，在此空间中唯一存在与 Q 无关的点 P，使得

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i}=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)\overrightarrow{QP}\,. \qquad (17分)$$

5. 设 A 为 n 阶幂零方阵，即存在自然数 N，使 $A^{N-1}\ne 0$，而 $A^N=0$. 试证： $\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}A^k/(k!)$ 与 $E+A$ 相似，其中 E 为 n 阶单位方阵，又 $A^0=E$. (17分)

6. 设 S 为 n 阶实对称方阵，且 S 之秩为 r. 试证： S 中存在 r 阶主子式不等于零. (17分)

第二试试题

(3 小时完成，满分 100)

1. 设 $a_1, \ldots, a_n$ 为 n 个给定的整数，它们不全为零，且其最大公因子为 1. 试证：对任一整数 m，方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = m$$

必有整数解. (16分)

2. 记单位圆之内接正 n 边形之周长为 $2a_n$，熟知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi.$$

由直接计算得 $a_6 = 3$，$a_{12} = 3.105\,828\,54$，$a_{24} = 3.132\,628\,61$. 如果令

$$b_n = \frac{1}{3}(4a_{2n} - a_n),$$

$$c_n = \frac{1}{15}(16b_{2n} - b_n),$$

则由 a_6, a_{12}, a_{24} 可算出

$$c_6 = 3.141\,592\,05.$$

断言“序列 $\{c_n\}$ 比序列 $\{a_n\}$ 更快地收敛于 π”对吗？请证明你的结论. (17分)

3. 试计算 $\sqrt[5]{2}$，精确到小数点后 3 位. (17分)

4. 设 $a_n \geq 0$，$n = 1, 2, \ldots$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$. 试证：

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \leq \pi$，$m = 1, 2, \ldots$；

(b) $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n} \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. (17分)

5. 试证：不等式

$$2ab \leq e^{a-1} + a \ln a + e^{b-1} + b \ln b$$

对所有 $a > 0, b > 0$ 成立，并求出等式成立的必要且充分条件. (17分)

6. 设 L 为 n 维线性空间，$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 为 L 的两组基. 试证：存在 $1,2,\dots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$, 使得

$$\{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n\},\quad j=1,2,\dots,n,$$

为 L 的 n 组基. (17分)

第六届全国大学生数学夏令营

（1992 年 7 月）

第一试试题

（3 小时完成，满分 100 分）

1. 设 $f\in L^2(0,\pi)$, 证明：不能同时有

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{3}{4},\quad \int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{3}{4}. \qquad (15分)$$

2. 对 $x\in\mathbb{R}$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\sin^{(n+1)}(x)=\sin(\sin^{(n)}(x))$, 其中 $\sin^{(1)}x=\sin x$. 试讨论 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^{(n)}(x)$ 的存在性，当有极限时试求之. (15分)

3. 试证任一偶阶群中必有二阶元. (15分)

4. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上无限次可微的实值函数，且存在 $L>0$, 使在 $\mathbb{R}$ 上对任意 $n\ge 0$ 有 $|f^{(n)}(x)|\le L$. 证明：如 $f\equiv 0$ 在一无限有界集 M 上成立，则 $f\equiv 0$. (20分)

5. 试证 $\mathbb{R}^2$ 上可数条直线不能充满整个平面.
(给出不依赖于 Baire 纲定理的初等证明.) (20分)

6. 对 $n\times n$ 阶实矩阵 A, 定义 $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}A^k/(k!)$, $\mathrm{tr}\,(A)$ 为 A 的对角线元素之和. 试证：$\det\left(e^A\right)=e^{\mathrm{tr}\,(A)}$. (15分)

第二试试题

（3 小时完成，满分 100 分）

1. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上实值连续函数. 若 $\mathbb{R}$ 上每一点均为 f 的相对极值点，求证：f 为常值函数. (20分)

2. 设 N,k 为正整数, $N>k$, $f(\xi)=\sum_{n=0}^{N}C_n e^{in\xi}$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$. 证明: $f(\xi)$ 被 $1+e^{i\xi}+\cdots+e^{i(k-1)\xi}$ 整除的充分必要条件是

$$\sum_{n}C_{nk}=\sum_{n}C_{nk+1}=\sum_{n}C_{nk+2}=\cdots=\sum_{n}C_{nk+k-1}. \qquad (20分)$$

3. 设 f 为整函数, ω_1,ω_2 为比例不为实数的两个非零复数, 且有常数 a,b 使得 $f(z+\omega_1)=af(z)$, $f(z+\omega_2)=bf(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

证明: $f(z)=Ae^{Bz}$, 其中 A,B 均为常数. (20分)

4. 试证: 两个 2×2 复矩阵 A 和 B 酉等价的充要条件为

$$\begin{cases}\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B,\\ \operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}B^2,\\ \operatorname{tr}A^*A=\operatorname{tr}B^*B,\end{cases}$$

这里 $A^*=(\overline{A})'$ 为 A 的共轭转置矩阵, $\operatorname{tr}A$ 为 A 的对角线元素之和. 又, 两个 $n\times n$ 复矩阵 A 和 B 称为酉等价, 如果存在一个 $n\times n$ 酉矩阵 U, 使得 $B=U^*AU$. (20 分)

5. 有限个抛物线内部不能覆盖平面. (这里抛物线的内部是指本题题解部分图中的阴影部分.) (20分)

第七届全国大学生数学夏令营

(1993 年 7 月)

第一试试题

(3 小时完成, 满分 100 分)

1. 设 m,n 为奇正整数, $(m,n)=1$, 试证:

$$\sum_{0<i<\frac{m}{2}}\left[\frac{ni}{m}\right]+\sum_{0<j<\frac{n}{2}}\left[\frac{mj}{n}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{4}. \qquad (20分)$$

2. 设 A 和 B 为 n 阶实正交方阵. 试证: $\det A\cdot\det B=1$ 当且仅当 $n-\operatorname{rank}(A+B)$ 为偶数. (20分)

3. 给定直线上的实值连续函数 f,g. 设对直线上具有紧支集的所有一

阶连续可微的实值函数 h, 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证： g 为一阶连续可微函数，并且

$$g'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (20分)$$

4. 利用 Cauchy 积分定理及

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

计算积分

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x. \qquad (20分)$$

5. 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 $f(x)$ 如下：任取 $x \in [0,1)$, 设 x 的十进小数表示为 $x = 0.\ n_1 n_2 n_3 \cdots$, 定义

$$f(x) = \max_{1\le i<+\infty} n_i,$$

又 $f(1) = 1$.

试证： $f(x)$ 为可测函数. (20分)

第二试试题

(3 小时完成，满分 100 分)

1. 给定实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 它满足条件

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,$

(b) $\displaystyle 0 < a_n \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\ \forall n = 1, 2, \ldots.$

试证：对任意实数 $x \in (0,1)$, 都有 $\{a_n\}$ 的子序列 $\{a_{n_k}\}$ 存在，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x. \qquad (20分)$$

2. 给定域 F 及其上 n 个两两不同的自同构 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. 试证： $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 线性无关. (20分)

3. 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ 上的全纯函数，且 $|f(z)|\le 1, \forall z\in D$. 设 D 中点 z_0 适合条件

$$0<|z_0|\le\frac{m-1}{m},$$

其中 m 为一个固定的自然数，并设 z_0 及 $-z_0$ 都是 $f(z)$ 的 m 重零点. 试证：

$$|f(0)|<e^{-2}.$$

(提示：考虑将 z_0 映为原点的 D 的保角变换.) (20分)

4. 设 (X,d) 为紧距离空间，$\{f_n\}$ 为 X 上的连续函数序列，f 为 X 上的连续函数，它们满足

(a) $f_1(x)\ge f_2(x)\ge\cdots, \forall x\in X$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x), \forall x\in X$.

试证：函数序列 $\{f_n\}$ 在 X 上一致地收敛于 f. (20分)

5. 给定正常数 a,b 及空间曲线 C:

$$\mathbf{r}(t)=(4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3b\cos 2t),\quad 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

试利用 Frenet 公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \kappa\\ 0 & -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

求曲线 C 的曲率 k 和挠率 κ 及 Frenet 标架 $\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$. (20分)

第八届全国大学生数学夏令营

(1994 年 7 月)

第一试试题

(满分 100 分)

1. 试求 $\left[\dfrac{10^{60}}{10^6+3}\right]$ 的个位数，其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

(20分)

2. 在平面上给定 $n\ (\ge 2)$ 个不同点. 试证：唯一存在一个面积最小的

闭圆盘，将这 n 个点盖住. (20分)

3. 设 f 为上半平面内的有界单叶解析映射，记 b 为其上界. 任给实数 a, 记带形

$$D_a = \{ z = x + iy \mid a \le x \le a + 4, b^2 \le y \}.$$

试证： $f(D_a)$ 的面积不超过 1. (20分)

4. 在 Hilbert 空间

$$l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \,\middle|\, x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty \right\}$$

中给定线性算子 $A : Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$, 其中 $\mathbb{C}$ 中序列 $\{a_j\}$ 为有界序列. 试分别给出且证明下面两种情形的充分且必要条件 (加在序列 $\{a_j\}$ 上):

(a) 算子 A 为紧算子;

(b) 算子 A 有闭值域. (20分)

5. 设 (R, δ) 为 Euclid 整环，且 δ 适合条件

$$\delta(a+b) \le \max(\delta(a), \delta(b)), \quad \forall a, b \in R.$$

试证： R 或为一域，或为一域上一元多项式环.

(注：环 R 称为整环，如果 R 是含幺元，不含零因子的交换环.

整环 R 称为 Euclid 整环，如果 R 中每个元素 a 都对应一个非负整数 $\delta(a)$, 使得

(a) $\delta(a) = 0$ 当且仅当 $a = 0$, 又 $\delta \ne 0$;

(b) $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$, $\forall a, b \in R$;

(c) 任取 $a, b \in R$, $b \ne 0$, 存在 $q, r \in R$, 使得

$$a = qb + r,$$

其中 $\delta(r) < \delta(b)$.) (20分)

第二试试题

(满分 100 分)

1. 试求积分方程

$$|f(x)|^3 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad x \ge 0$$

的所有连续函数解. (25分)

2. 设 f, g 为闭单位圆盘 $\{\, z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1 \,\}$ 上的解析函数，且在单位圆周 $\{\, z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ 上适合条件

$$|f+g| < |f| + |g|.$$

试证：对任意非负实数 λ, 函数 $f-\lambda g$ 在单位圆内 (即 $\{\, z\in\mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$) 的零点个数与 f 及 g 在单位圆内的零点个数都相同. (25分)

3. Dirichlet 函数 $D(x)$ 是不是某个连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限？请证明你的断言.

(注： Dirichlet 函数 $D(x)$ 定义如下：

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时;} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时.}) \end{cases}$$ (25分)

4. 给定 $n\times n$ 实矩阵集合 M, 它适合条件

(a) $n\times n$ 单位矩阵 $E\in M$, $n\times n$ 零矩阵 $0\notin M$;

(b) 若 $A, B\in M$, 则 $AB\in M$ 或 $-AB\in M$;

(c) 若 $A, B\in M$, 则 $AB = BA$ 或 $AB = -BA$;

(d) 若 $A\in M$, 且 $A\ne E$, 则存在 $B\in M$, 使得 $AB = -BA$.

试证：集合 M 的元素个数不超过 n^3.

(提示：设法用数学归纳法.) (25分)

第一至八届全国大学生数学夏令营 数学竞赛试题解答

编者说明

中国科学院数学研究所从 1987 年开始举行的全国大学生数学夏令营，各次出考题的人都不完全相同，而且由于档案不全而无法得知何考题由何人提供以及原始解答为何. 在此对参加出题的数学所同仁们表示感谢.

第一届至第八届全国大学生数学夏令营的数学竞赛，除了第一届和第四届只有一试外，其余各届均有两试. 为了方便使用，我们以 "1.3","4.2" 分别表示第一届的第 3 道试题和第四届的第 2 道试题；其余各届的试题以 3 个数字标志，如 "2.1.5" 表示第二届第一试的第 5 道试题.

有些试题给出了几个解答，依次记为证法 1, 证法 2,…或解法 1, 解法 2,…在某些试题的解答前对解答的由来、解题的思路，或问题的困难所在作了介绍，冠以 "分析" 名，依次记为分析 1, 分析 2,…并且对某些试题作了一些推广，或对解答作了一些讨论，放在该题解答之后的说明中.

解答不一定是最佳的，也难免有疏漏不妥之处. 希望广大的读者，特别是大学生朋友们向我们提供你们的好的解答，指出书中的错误，以便不断地充实本书，提高本书的质量.

第一届全国大学生数学夏令营
试题解答

1.1 求出所有在 $[0,\infty)$ 上的正值连续函数 $g(x)$, 使得

$$\frac{1}{2}\int_0^x [g(t)]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2, \quad \forall x > 0.$$

解 两边求导数，有

$$\frac{1}{2}[g(x)]^2 = \frac{2}{x}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)g(x) - \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

注意到当 $x \in [0,+\infty)$ 时有 $g(x) \in (0,+\infty)$, 于是

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t > 0, \qquad x \in (0,+\infty).$$

由方程

$$\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 2xg(x)\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}(g(x))^2 = 0$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t &= xg(x) \pm \sqrt{x^2(g(x))^2 - \frac{x^2}{2}(g(x))^2} \\ &= xg(x) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}xg(x) = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)xg(x).\end{aligned}$$

由于 $g(x)$ 连续，所以有

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)xg(x),$$

或者

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)xg(x).$$

两边再求导数，有

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(g(x) + xg'(x)),$$

或者

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(g(x) + xg'(x)).$$

所以有

$$-g(x) = (\sqrt{2}+1)xg'(x),$$

或者

$$g(x) = (\sqrt{2}-1)xg'(x).$$

注意到所求之解有 $g(x) > 0$, 可令

$$f(x) = \log g(x),$$

于是

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)x},$$

或者

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)x}.$$

因此

$$\log g(x) = f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}+1}\log x + C,$$

或

$$\log g(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\log x + C.$$

因此求出

$$g(x) = C_1 x^{1-\sqrt{2}},$$

或

$$g(x) = C_1 x^{1+\sqrt{2}},$$

其中 C_1 为常数. 由于要求 $g \in C^0[0,+\infty)$, 而 $x^{1-\sqrt{2}}$ 在 $x=0$ 处不连续, 所以 $g(x) = C_1 x^{1+\sqrt{2}}$. 由于要求 $g(x)$ 为正值函数, 所以 $C_1 > 0$. 因此所求通解为

$$g(x) = C_1 x^{1+\sqrt{2}}, \qquad \forall C_1 \in (0,+\infty).$$

1.2 设 A 为 n 阶实方阵. 试证: A 对称当且仅当 $AA' = A^2$.

证明 显然, $K = A - A'$ 为 n 阶实斜对称方阵. 由条件 $AA' = A^2$ 及迹之性质, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(KK') &= \operatorname{tr}(A-A')(A'-A)\\ &= \operatorname{tr}(AA' - (A')^2 - A^2 + A'A).\end{aligned}$$

由 $\operatorname{tr}(A')^2=\operatorname{tr}(A^2)'=\operatorname{tr}A^2$, $\operatorname{tr}A'A=\operatorname{tr}AA'$, 所以

$$\operatorname{tr}(KK')=2\operatorname{tr}(AA'-A^2).$$

今若 A 为对称方阵, 自然 $A'=A$, $AA'=A^2$. 反之, 若 $AA'=A^2$, 于是有 $\operatorname{tr}(KK')=0$. 记 $K=(a_{ij})$, 则

$$0=\operatorname{tr}(KK')=\sum_{i,j}a_{ij}^2.$$

但 K 为实方阵, 所以这证明了 $a_{ij}=0,\forall 1\le i,j\le n$. 因此 $K=A-A'=0$, 即 $A'=A$. 所以 A 对称. 证毕.

说明 这道题可以有许多种证明. 例如: 由条件 $AA'=A^2$ 得 $A(A-A')=0$. 注意到 $K=A-A'$ 为实斜对称方阵, 所以存在酉方阵 U, 使得

$$UK\overline{U}'=\operatorname{diag}(\sqrt{-1}a_1I_1,\ldots,\sqrt{-1}a_sI_s),$$

其中 $a_1,\ldots,a_s$ 为不同实数, $a_1=0$; $I_1,\ldots,I_s$ 为单位方阵. 由 $AK=0$, 有 $(UA\overline{U}')(UK\overline{U}')=0$. 将 $UA\overline{U}'$ 按 $UK\overline{U}'$ 之同样方式分块, 有

$$UA\overline{U}'=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1s}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{ss}\end{pmatrix},$$

所以由

$$(UA\overline{U}')(UK\overline{U}')=0$$

可知

$$UA\overline{U}'=\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

另一方面, 注意到 A 为实方阵, 故有

$$\begin{aligned}UK\overline{U}'&=UA\overline{U}'-UA'\overline{U}'=UA\overline{U}'-\overline{(UA\overline{U}')}'\\ &=\begin{pmatrix}A_{11}-\overline{A}_{11}'&-\overline{A}_{21}'&\cdots&-\overline{A}_{s1}'\\ A_{21}&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&0&\cdots&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以 $A_{21}=0,\ldots,A_{s1}=0, A_{11}-\overline{A}'_{11}=\sqrt{-1}a_1I_1=0$. 这证明了

$$UA\overline{U}'=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}'_{11}=A_{11},$$

所以 $UA\overline{U}'=\overline{(UA\overline{U}')}'=UA'\overline{U}'$. 由于 U 为酉方阵, 故有 $A=A'$, 即 A 为实对称方阵. 证毕.

1.3 试证: 函数 $f(u,v)=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-9/v\right)^2$ 在区域 $D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<u<\sqrt{2},\ v>0\right\}$ 中的最小值为 8.

分析 1 求二元函数 f 在一个开区域 D 中的最小值, 不妨先试用常规方法: 求出 f 在 D 中的临界点 (u,v) (即满足 $(\partial f/\partial u)(u,v)=0$, $(\partial f/\partial v)(u,v)=0$ 的 (u,v)), 再从这些临界点中选一点 (若有多个临界点), 使其 f 值最小. 若只有一个临界点, 则由于 f 显然无最大值, 因此 f 在该点处必取其最小值.

证法 1 先求函数 f 的临界点:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u}=2(u-v)-2\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)\cdot\dfrac{u}{\sqrt{2-u^2}}=0, & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}=-2(u-v)+2\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)\cdot\dfrac{9}{v^2}=0. & (2) \end{cases}$$

视 $u-v$, $\sqrt{2-u^2}-9/v$ 为两个未知量, 则上述是一个二元一次齐次方程组. 我们断言, 在临界点处其行列式等于 0:

$$\triangle=\begin{vmatrix} 2 & -\dfrac{2u}{\sqrt{2-u^2}} \\ -2 & \dfrac{18}{v^2} \end{vmatrix}=4\left(\frac{9}{v^2}-\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)=0.$$

事实上, 若 $\triangle\neq 0$, 则上述齐次方程组只有平凡解:

$$\begin{cases} u-v=0, \\ \sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}=0. \end{cases}$$

因此 $u=v$, $\sqrt{2-u^2}=9/u$. 所以有 $u^4-2u^2+81=0$, 此方程无实数解. 因此在临界点处 $\triangle=0$, 即

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}=\frac{9}{v^2}. \tag{3}$$

这样，在条件 (3) 下， (1) 与 (2) 实为同一方程. 整理 (1), 得

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}=\frac{v^2}{9}. \tag{4}$$

由 (3), (4) 得

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}=\frac{9}{v^2}=\frac{v^2}{9}=1.$$

注意到 $u>0$, $v>0$, 即得

$$u=1,\ v=3.$$

即 f 只有一个临界点. 显然， f 在 D 中无最大值 (只需令 $v\to+\infty$ 或 $v\to 0_+$ 即可知). 因此 $(u,v)=(1,3)$ 为 f 的最小值点，而 $f(1,3)=8$. 证毕.

分析 2 仔细分析，可看出函数 $f(u,v)$ 的几何意义. 根据 $f(u,v)$ 的形式，它是 $\mathbb{R}^2$ 中某类点 $P(u)$ 与另一类点 $Q(v)$ 之间的欧氏距离的平方. 只需确定 $P(u)$ 和 $Q(v)$, 问题即迎刃而解.

证法 2 令点 $P(u)=(u,\sqrt{2-u^2})\in\mathbb{R}^2$, 点 $Q(v)=(v,9/v)\in\mathbb{R}^2$. 显然，点集

$$\begin{aligned} M &=\left\{P(u)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<u<\sqrt{2}\right\} \\ &=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=2,\, x>0,\, y>0\right\} \end{aligned}$$

为圆周在第一象限中的那部分，点集

$$\begin{aligned} N &=\left\{Q(v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; v>0\right\} \\ &=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy=9,\, x>0,\, y>0\right\} \end{aligned}$$

为双曲线在第一象限中的那一支.

以 $\rho(P,Q)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中点 P,Q 之间的欧氏距离，则

$$\begin{aligned} f(u,v) &=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2 \\ &=[\rho(P(u),Q(v))]^2\geq[\rho(C,H)]^2 \\ &=[\rho((1,1),(3,3))]^2=(3-1)^2+(3-1)^2=8, \end{aligned}$$

即当 $(u,v)=(1,3)\in D$ 时， $f(u,v)$ 取其最小值 8.

$\rho(P(u),Q(v)) \geq \rho(C,H)$ 的证明如下：

易知 $x+y=2$ 与 $x+y=6$ 分别是 $P(u)$ 所在圆周在点 $C(1,1)$ 处与 $Q(v)$ 所在双曲线在 $H(3,3)$ 处的切线，此两切线相互平行，并且都与线段 CH（位于直线 $x=y$ 上）垂直；除了点 C 外，其余的点 $P(u)\in M$ 都满足 $x+y<2$（$x\neq y, x^2+y^2=2$ 时，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2<2(x^2+y^2)=4$，所以 $x+y<2$）；除了点 H 外，其余的点 $Q(v)\in N$ 都满足 $x+y>6$（$x>0, y>0, x\neq y, xy=9$ 时，$x+y>2\sqrt{xy}=6$）。因而

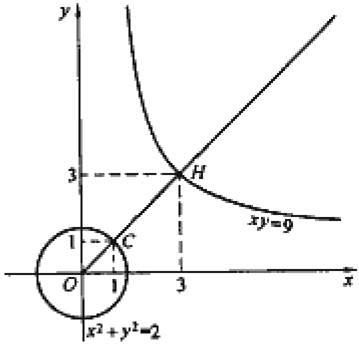


图 1.3

$$\rho(P(u),Q(v)) \geq \rho(C,H).$$

1.4 求下列方程的实根：

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,.$$

解法 1 由算术根的定义可知，若上述方程有实根 x_0，则必须 $x_0>0$。于是可得 $x_0>1$，因此

$$x_0=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x_0}}}>\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}=a>\sqrt{1+\sqrt{2}},$$

所以 $x_0>a$。

另一方面，所给之方程等价于方程

$$x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}},\qquad x>a.$$

注意到当 $x>a$ 时有 $x^2-1>0$，所以上述方程等价于方程

$$(x^2-1)^2=1+\sqrt{1+x},\qquad x>a.$$

注意到 $(x^2-1)^2>(a^2-1)^2=1+\sqrt{2}>1$，所以所给之原方程等价于下列方程：

$$[(x^2-1)^2-1]^2=1+x,\qquad x>a,$$

即原方程之根 x_0 适合条件

$$x_0 > a, \quad f(x_0) = 0,$$

其中

$$f(x) = x^8 - 4x^6 + 4x^4 - x - 1$$

为多项式.

我们来证明

$$2 > x_0 > a.$$

事实上，若 $x_0 \geq 2$, 则

$$f(x_0) = x_0^6(x_0^2 - 4) + (x_0^4 - x_0) + (x_0^4 - 1) + 2x_0^4 > 2x_0^4 > 0$$

这证明了多项式 $f(x)$ 之根在开区间 $(-\infty, 2)$ 中，所以证明了断言.

下面证 $f(x)$ 在区间 $(a, 2)$ 中恰有一根．事实上，

$$\begin{aligned}
f(2) &= (2^4 - 2 \cdot 2^2)^2 - (1 + 2) = 61 > 0, \\
f(a) &= (a^4 - 2a^2)^2 - (1 + a) = a^4(a^2 - 2)^2 - (1 + a) \\
&= (1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}})^2(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1)^2 - (1 + a) \\
&= \sqrt{2} - 1 - a < 1 - a < 0,
\end{aligned}$$

所以在 $(a, 2)$ 中必有实根．令

$$f'(x) = 8x^7 - 24x^5 + 16x^3 = 8x^3(x^2 - 1)(x^2 - 2) - 1.$$

由 $x > a$ 有 $x^2 > 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}} > 1 + \sqrt{2}$, 所以

$$f'(x) > 8(2 - \sqrt{2}) - 1 > 4 - 1 > 0,$$

即 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 中单调增，因此 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 中恰有一根.

记此唯一实根为 x_0. 令

$$y_0 = \sqrt{1 + x_0},$$

于是

$$\begin{aligned}
y_0 &= \sqrt{1 + x_0} > \sqrt{1 + a} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}} \\
&> \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} = a,
\end{aligned}$$

即 $y_0 \in (a, +\infty)$. 然而 $y_0^2 = 1 + x_0$, 即 $x_0 = y_0^2 - 1$. 于是

$$y_0^2 - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x_0}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + y_0}},$$

即 $(y_0^2 - 1)^2 - 1 = \sqrt{1 + y_0}$, 所以 $(y_0^4 - 2y_0^2)^2 = 1 + y_0$, 即 $f(y_0) = 0$. 由于 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 中实根唯一，所以证明了 $y_0 = x_0$, 即证明了

$$\sqrt{1 + x_0} = x_0,$$

于是 $x_0^2 - x_0 - 1 = 0$. 所以根为 $x_0 = (1 \pm \sqrt{5})/2$. 但是 $a < x_0 < 2$, 因此所求之根为

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

解法 2 对于解法 1 中函数 f 用分解因式:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^8 - 4x^6 + 4x^4 - x - 1 \\ &= (x^2 - x - 1)(x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1). \end{aligned}$$

因为 $x^2 - x - 1 = 0$ 在 $(a, 2)$ 中有根 $x_0 = (1 + \sqrt{5})/2$, 由 $f(x)$ 在 $(a, 2)$ 中恰有一个根，这证明了断言. 证毕.

解法 3 由于原方程之根 x_0 为 $f(x) = 0$ 的适合条件 $a < x_0 < 2$ 之根，直接考虑 $f(x)$. 已知

$$f(x) = (x^2 - x - 1)(x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1).$$

考虑多项式

$$g(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1.$$

今

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(6x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 3x + 2) \\ &= x[6x^2(x^2 - 1) + 3x(x^2 - 1) + 2x^2(x - 1) + 2], \end{aligned}$$

当 $a < x < 2$ 时有 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(a, 2)$ 上单调递增. 然而

$$g(a) = a^2(a^2 - 1)^2 + a^3(a^2 - 1) + 1 > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(a, 2)$ 中无根. 因此在区间 $(a, 2)$ 中实根只有 $x_0 = (1 + \sqrt{5})/2$. 这个证明可以避免证明 $f(x)$ 在区间 $(a, 2)$ 中根之唯一性.

1.5 设 $\varphi(\alpha,\alpha)$ 为线性空间 L 上的二次型，$L=L_1\oplus L_2$ 为两个低维子空间的直接和，φ 在 L_1 上正定，在 L_2 上负定．试证：二次型 φ 的符号差为 $\dim L_1-\dim L_2$．

证明 在 L_1 中取基，再在 L_2 中取基，便得到 L 之基．在此基下，φ 对应实对称方阵

$$S=\begin{pmatrix} S_1^{(r)} & B \\ B' & -S_2^{(n-r)} \end{pmatrix},$$

其中 $r=\dim L_1$，$n-r=\dim L_2$，$n=\dim L$．由题设有 S_1 定正，S_2 也定正．于是 $\det S_1\det S_2\neq 0$．今有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ -B'S_1^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & B \\ B' & -S_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ -B'S_1^{-1} & I \end{pmatrix}' \\ =&\begin{pmatrix} S_1 & B \\ 0 & -S_2-B'S_1^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ -B'S_1^{-1} & I \end{pmatrix}' \\ =&\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & -(S_2+B'S_1^{-1}B) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $S_1>0$，所以 $S_1^{-1}>0$，因此 $B'S_1^{-1}B\geq 0$，于是 $S_3=S_2+B'S_1^{-1}B>0$．

所以证明了在 L 中存在子空间 L_3，使得

$$L=L_1\oplus L_3$$

为空间直接和，又 φ 在 L_1 上定正，在 L_3 上负定，且

$$\varphi(L_1,L_3)=0.$$

这时在 L_1 中取基，再在 L_3 中取基，可使 φ 对应的方阵为

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & -T_3 \end{pmatrix},$$

其中 T_1 为 r 阶正定对称方阵，T_3 为 $n-r$ 阶正定对称方阵．于是存在 r 阶可逆方阵 P 及 $n-r$ 阶可逆方阵 Q，使得

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & -T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & -I^{(n-r)} \end{pmatrix}.$$

这证明了 φ 的符号差为 $r-(n-r)=\dim L_1-\dim L_2$．证毕．

1.6　设 P_1 为边长等于 1 的等边三角形，P_2 是由 P_1 之各边 3 等分点连成的六边形，…，P_{n+1} 是由 P_n 之各边 3 等分点连成的凸多边形. 试证 P_n 有 $3\cdot 2^{n-1}$ 条边，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\text{Area}(P_n)$.

分析 1　从根据题目所述试画之图形可想到，多边形 P_n 的极限图形 P 既不是圆，又不是椭圆.（为什么？）

如果我们能求出 P_n 的面积，那么所要求的极限即可求得.

P_n 是从边长为 1 的等边三角形一次一次地削去"棱角"所得. 因此如果能求得所削去部分的面积，则 P_n 的面积也就得到了.

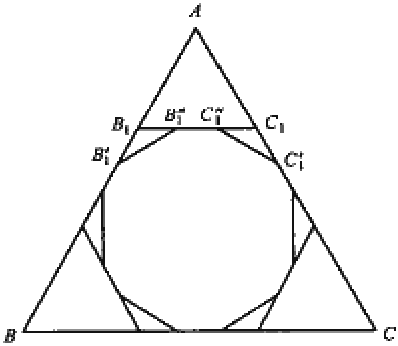


图 1.6 (a)

为了总结规律，我们用 S_1 表示从 P_1 得到 P_2 时削去的面积，用 S_2 表示从 P_2 得到 P_3 时削去的面积，…，一般地，n 表示从 P_n 得到 P_{n+1} 时削去的面积；并仍以记号 P_n 表示多边形 P_n 的面积. 容易知道

$$S_1 = 3\cdot\frac{1}{9}P_1 = \frac{1}{3}P_1.$$

在从 P_1 得到 P_2 时削去的每一小块两个角的外部，例如图 1.6(a) 中的 $\triangle AB_1C_1$ 的 B_1, C_1 处之外，在从 P_2 制作 P_3 时又被削掉两小块：$\triangle B_1B_1'B_1''$ 和 $\triangle C_1C_1'C_1''$. 由所给条件容易得到

$$S_{\triangle B_1B_1'B_1''} = S_{\triangle C_1C_1'C_1''} = \frac{1}{9}S_{\triangle AB_1C_1}.$$

所以得到 $S_2 = 2S_1/9$. 类似地我们可以得到

$$S_{n+1} = \frac{2}{9}S_n,\qquad n = 1, 2, \ldots,$$

因而

$$S_n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}S_1,\qquad n = 1, 2, \ldots.$$

这样，对于 $n = 2, 3, \ldots$, 有

$$P_n = P_1 - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1})$$

$$= P_1 - \left[S_1 + \frac{2}{9}S_1 + \cdots + \left(\frac{2}{9}\right)^{n-2} S_1\right]$$
$$= P_1 - S_1 \left[1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right] \Big/ \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$
$$= \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right] \cdot \frac{3}{7}\right\} \cdot P_1,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{4}{7}P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{7}.$$

此外，用归纳法容易证明 P_n 是 $3 \cdot 2^{n-1}$ 边形.

解法 1　1. 首先，证明多边形 P_n 有 $3 \cdot 2^{n-1}$ 条边. 事实上，由从 P_n 得到 P_{n+1} 的方式可知， P_{n+1} 是在 P_n 的每个角处切去一个小三角形 (称为 n 级三角形) 而得，且任何两个 n 级三角形不相交. 因此 P_{n+1} 的边数恰为 P_n 的边数的两倍. 这样，由于 P_1 有 $3 = 3 \cdot 2^{1-1}$ 条边，因此 P_n 有 $3 \cdot 2^{n-1}$ 条边， $n = 1, 2, \ldots$.

2. 现证 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 4P_1/7 = \sqrt{3}/7$.

记号 P_n, S_n 如分析一中所述，并称 P_n 的边为 n 级线段.

(1)　如图 1.6(b) 所示， $\tilde{A}\tilde{E}$, $\tilde{A}\tilde{G}$ 为两条 $n-1$ 级线段， $\triangle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ 为从 P_{n-1} 得到 P_n 时切去的一个 $n-1$ 级三角形， $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{D} = \tilde{D}\tilde{E}$, $\tilde{A}\tilde{C} = \tilde{C}\tilde{F} = \tilde{F}\tilde{G}$. 在 $\triangle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ 外从 P_n 中再切去两个 n 级三角形 $\triangle\tilde{B}B'B''$ 和 $\triangle\tilde{C}C'C''$, 即得到 P_{n+1}. 但

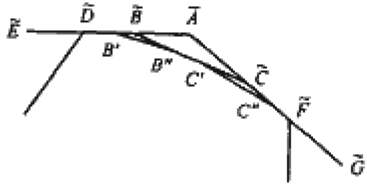


图 1.6 (b)

$$\begin{aligned} S_{\triangle\tilde{B}B'B''} &= \frac{1}{2}\tilde{B}B' \cdot \tilde{B}B'' \cdot \sin\angle B'\tilde{B}B'' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\tilde{B}\tilde{D} \cdot \frac{1}{3}\tilde{B}\tilde{C} \cdot \sin(\pi - \angle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\tilde{A}\tilde{B} \cdot \frac{1}{3}\tilde{B}\tilde{C} \cdot \sin\angle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}\tilde{A}\tilde{B} \cdot \tilde{B}\tilde{C} \cdot \sin\angle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} = \frac{1}{9}S_{\triangle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}, \end{aligned}$$

同理，$S_{\triangle \tilde{C}C'C''}=\frac{1}{9}S_{\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}$. 因此

$$S_{\triangle \tilde{B}B'B''}+S_{\triangle \tilde{C}C'C''}=\frac{2}{9}S_{\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}.$$

由于每个 $n-1$ 级三角形对应两个 n 级三角形，因而易知

$$S_n=\frac{2}{9}S_{n-1},\qquad n=2,3,4,\ldots,$$

所以

$$S_n=\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}S_1,\qquad n=1,2,3,\ldots,$$

显然，$S_1=1P_1/9$, $P_1=\sqrt{3}/4$.

(2) 由分析 1 可知

$$\begin{aligned}P_n&=P_1-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})\\&=\left\{1-\left[1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right]\frac{3}{7}\right\}\cdot P_1,\qquad n=1,2,3,\ldots,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{7}P_1=\frac{\sqrt{3}}{7}.$$

说明 1　由分析 1 及解法 1 知，当 P_1 是任一凸多边形时，亦可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$：

首先，求得 S_1 与 P_1 的关系，不妨设 $S_1=\lambda P_1$, $0<\lambda<1$. 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P_n&=\lim_{n\to\infty}[P_1-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})]\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{P_1-S_1\left[1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right]\Big/\left(1-\frac{2}{9}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left[1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right]\cdot\frac{9}{7}\lambda\right\}\cdot P_1=\left(1-\frac{9}{7}\lambda\right)P_1.\end{aligned}$$

如 P_1 为一个三角形，则 $\lambda=1/3$. 此时有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=4P_1/7$. 此即分析 1 中的结果.

说明 2　解法 1, 2 中的等式 $S_{\triangle \tilde{B}B'B''}=S_{\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}/9$ 亦可用向量表示来证明：

设 $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}=\vec{u}$, $\overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}}=\vec{v}$, 则 $\overrightarrow{\tilde{B}B'}=\vec{u}/3$, $\overrightarrow{\tilde{B}B''}=\vec{v}/3$, 则

$$S_{\triangle \tilde{B}B'B''}=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}\vec{u}\times\frac{1}{3}\vec{v}\right|=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=\frac{1}{9}S_{\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}.$$

分析 2 由分析 1, 不妨设初始图形 P_1 为一任意三角形. 由 P_n 的作法可知, 任一 n 级线段的中点必属于 P_n 的极限图形 P 的边界曲线 C. 由于从 P_1 到 P_2, 从 P_2 到 P_3, $\ldots$, 从 P_n 到 P_{n+1} 的作法是相同的 (即在 j 级线段上取三分点, 再连线段, $j=1,2,\ldots,n$), 而这些作法是仿射不变的, 因而, 任意两个不同级 (或同级) 的三角形 (连带曲线 C 的一部分) 是仿射等价的. 特别, 对于一级三角形和二级三角形利用这一事实, 再利用区域及其仿射像的面积比为一定值 (即仿射变换的系数矩阵行列式的绝对值), 可以确定 P 的由 P_1 的中位线切割下的那部分的面积, 从而可求得 P 的面积, 即所求 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

解法 2 由 P_n 的作法可知, 各级线段的中点皆属于 P 的边界曲线 C. 设 $P_1$3 边的中点分别为 R,S,T (见图 1.6 (c)). 由 P_n 的作法及 P_n 的凸性知 P 亦为凸集, 因此 $\triangle RST\subset P$. 记一级 $\triangle AB_1C_1$ 的边 B_1C_1 的中点为 R_1. 则由 $\tau(T)=R_1$, $\tau(A)=C_1$, $\tau(S)=S$ 可唯一确定一个仿射变换 τ. 由曲线 C 的构造过程 (它是 P_n 的边界曲线 C_n 的极限, 而 C_n 是由 C_{n-1} 上的 $n-1$ 级线段的三分点相连而成) 及仿射变换的性质知

$$\tau(\text{弧}TR_1S)=\text{弧}R_1US,$$
$$\tau(\text{弓形}TR_1S)=\text{弓形}R_1US.$$

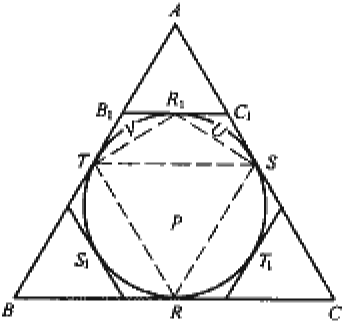


图 1.6 (c)

又, 对任一有面积的区域 D, 有

$$\frac{S_{\tau(D)}}{S_D}=|d_\tau|,$$

其中 d_τ 为仿射变换 τ 的系数矩阵的行列式. 因而

$$\frac{S_{\text{弓形}R_1US}}{S_{\text{弓形}TR_1S}}=\frac{S_{\triangle R_1C_1S}}{S_{\triangle TAS}}=\frac{R_1C_1\cdot C_1S}{TS\cdot AS}=\frac{\frac{1}{3}TS\cdot\frac{1}{3}AS}{TS\cdot AS}=\frac{1}{9}.$$

同样可得

$$S_{\text{弓形}TVR_1}=\frac{1}{9}S_{\text{弓形}TR_1S}.$$

而

$$\begin{aligned}S_{\text{弓形}TR_1S}&=S_{\triangle TR_1S}+S_{\text{弓形}R_1US}+S_{\text{弓形}TVR_1}\\&=S_{\triangle TR_1S}+\frac{2}{9}S_{\text{弓形}TR_1S},\end{aligned}$$

易知

$$S_{\triangle TR_1S}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{48};$$

所以得

$$S_{弓形TR_1S}=\frac{3\sqrt{3}}{112}.$$

同样可得

$$S_{弓形ST_1R}=S_{弓形RS_1T}=\frac{3\sqrt{3}}{112}.$$

显然，

$$S_{\triangle RST}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{16}.$$

所以

$$P=S_{弓形TR_1S}+S_{弓形ST_1R}+S_{弓形RS_1T}+S_{\triangle RST}=\frac{\sqrt{3}}{7},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\sqrt{3}/7$.

P_n 是 $3\cdot 2^{n-1}$ 边形的证明同解法 1.

说明 3 著名数学家 George de Rham 曾研究过多边形 P_n 的极限图形 P 的边界曲线 C, 可参阅 “Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane,” Elem. Math., **2**(1947), 73–76, 89–97; “Sur une courbe plane,” J. Math. Pures Appl., **35**(1956), 25–42; “Sur les courbes limites de polygones obtenus par trisection,” Enseign. Math., **5** (1959), 29–43. 他的研究结果表明，C 是一条几乎处处为零曲率的 C^1 曲线．然而，它的任一弧段中都包含有曲率为 $+\infty$ 的点，因而 C 无处解析．如果从 P_n 得到 P_{n+1} 的过程是把 n 级线段分为比例 $(1/4,1/2,1/4)$, 而不是 $(1/3,1/3,1/3)$, $n=1,2,\ldots$, 那么曲线 C 是解析的，由抛物线弧段拼组而成.

第二届全国大学生数学夏令营
试题解答

第一试

2.1.1 记 M_n 为所有 $n\times n$ 复系数方阵构成的复向量空间. 设 $X, Y\in M_n$, 则 $Q(X,Y)=\mathrm{tr}(X\overline{Y})$ 是 M_n 上的 Hermite 二次型. 求 Q 的符号差 (即正本征根个数与负本征根个数之差).

(提示：找 Q 的极大正定子空间.)

解法 1 首先证明 Hermite 型 Q 非退化，即其核

$$\left\{ X\in M_n \;\middle|\; Q(X,M_n)=0 \right\}=0.$$

事实上， n^2 维复线性空间 M_n 有自然的基 e_{ij}, $1\le i,j\le n$, 其中 e_{ij} 为 $n\times n$ 方阵，它的第 i 行，第 j 列元素为 1, 其余元素都为零．它们有如下关系

$$e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il},\qquad 1\le i,j,k,l\le n,$$

这里 δ_{jk} 为 Kronecker 符号.

任取 $X\in M_n$, 则

$$X=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}e_{ij},$$

其中 x_{ij} 为 X 的第 i 行，第 j 列位置的元素．由定义可知

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,X\overline{e}_{pq} &= \mathrm{tr}\sum_{i,j}x_{ij}e_{ij}\overline{e}_{pq}=\sum_{i,j}x_{ij}\,\mathrm{tr}\,\delta_{jp}e_{iq}\\ &=\sum_{i,j}x_{ij}\delta_{jp}\delta_{iq}=x_{qp},\qquad 1\le p,q\le n,\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{tr}\,X\overline{Y}=0$, $\forall Y\in M_n$, 可推出 $x_{qp}=0$, $1\le p,q\le n$, 即 $X=0$. 这证明了 Hermite 型 Q 非退化.

在 M_n 中有子空间

$$\begin{aligned}S_n &=\left\{ X\in M_n \;\middle|\; X'=X \right\},\\ K_n &=\left\{ X\in M_n \;\middle|\; X'=-X \right\}.\end{aligned}$$

由于任取 $n\times n$ 复方阵 X, 则

$$X=\left[\frac{1}{2}(X+X')\right]+\left[\frac{1}{2}(X-X')\right],$$

其中 $(X+X')/2$ 复对称，即在 S_n 中；$(X-X')/2$ 复斜对称，即在 K_n 中. 这证明了 M_n 可分解为两子空间之和

$$M_n = S_n + K_n.$$

再证这是空间直接和. 事实上，若 $X \in S_n \cap K_n$, 则有 $X' = X, X' = -X$, 所以 $X = -X$, 即 $X = 0$. 这证明了断言.

下面来考查 Hermite 型 Q 在 S_n 及 K_n 上的性质. 今任取 $X \in S_n$, 即 $X' = X$, 于是

$$Q(X,X) = \operatorname{tr} X\overline{X} = \operatorname{tr} X\overline{X}' \geq 0,$$

且等号成立当且仅当 $X = 0$. 这证明了 Q 限制在 S_n 上正定. 又任取 $X \in K_n$, 即 $X' = -X$, 于是

$$Q(X,X) = \operatorname{tr} X\overline{X} = -\operatorname{tr} X\overline{X}' \leq 0,$$

且等号成立当且仅当 $X = 0$. 这证明了 Q 限制在 K_n 上负定.

如果 $X \in S_n, Y \in K_n$, 即 $X = X', Y = -Y'$, 于是

$$\begin{aligned} Q(X,Y) &= \operatorname{tr} X\overline{Y} = \operatorname{tr} (X\overline{Y})' = \operatorname{tr} (\overline{Y}')X' \\ &= -\operatorname{tr} \overline{Y}X = -\operatorname{tr} X\overline{Y}. \end{aligned}$$

这证明了 $Q(X,Y) = 0$. 因此证明了 S_n 和 K_n 在 Q 下正交. 所以在 S_n 中取基，再在 K_n 中取基，使构成 M_n 之基. 在这组基下 Q 对应 Hermite 方阵

$$H = \begin{pmatrix} H_1^{(r)} & 0 \\ 0 & -H_2^{(m-r)} \end{pmatrix},$$

其中 H_1 为 $r = n(n+1)/2 = \dim S_n$ 阶正定 Hermite 方阵； H_2 为 $m - r = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 = \dim K_n$ 阶正定 Hermite 方阵. 所以 H 之正本征根个数为 r, 负本征根个数为 $m-r$. 因此符号差为

$$r - (m-r) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

此题之另一解用提示.

解法 2 首先同上解法来证明 Q 为非退化 Hermite 型. 利用对任一 $n \times n$ 复方阵 X, $\operatorname{tr} X\overline{X}' \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $X = 0$, 我们可以作 M_n 之子空间

$$S_n = \{\, X \in M_n \mid X' = X \,\}.$$

于是 $Q(X,X)=\operatorname{tr} X\overline{X}=\operatorname{tr} X\overline{X}'\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $X=0$. 因此 Q 在 S_n 上为正定 Hermite 型.

下面来证 S_n 为极大正定子空间. 设若 S_n 不是极大正定子空间, 于是存在极大正定子空间 L, 它包含了 S_n. 任取 $Y\in L$, $Y\notin S_n$. 由

$$Y=\frac{1}{2}(Y+Y')+\frac{1}{2}(Y-Y')$$

可知 $K=(Y-Y')/2\neq 0$, 且 $K\in L$. 因此 $Q(K,K)>0$. 但是

$$Q(K,K)=\operatorname{tr} K\overline{K}=-\operatorname{tr} K\overline{K}'<0.$$

这导出矛盾. 所以 S_n 为极大正定子空间.

由上面讨论可引出子空间 $K_n=\{\,X\in M_n \mid X'=-X\,\}$. 后面的证明和原来解法相同.

由此可见, 所谓提示, 实际上是建议考虑 S_n 及 K_n. 用不着去证明 S_n 为极大正定这一事实.

2.1.2 设 V 是 n 维复线性空间, u 是 V 到自身的复线性变换. 把数域从复数缩小到实数, 则 V 成为 $2n$ 维实线性空间, 记为 V_0. 这时 u 也可看作 V_0 到自身的实线性变换, 记为 u_0. 求复数 $\det(u)$ 与实数 $\det(u_0)$ 之间的关系.

解 令 V 为 n 维复线性空间. 在其中取定一组基 $e_1,\ldots,e_n$. 于是对于线性变换 u 有

$$u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j,\qquad 1\leq i\leq n,$$

它对应于 $n\times n$ 复方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det(u)=\det A.$$

将 V 作为实线性空间, 则它是 $2n$ 维的. 因此有基

$$e_1,\ldots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\ldots,\sqrt{-1}e_n.$$

在这一组基下，对于 $1 \le i \le n$，线性变换 u_0 满足

$$\begin{aligned} u_0(e_i) &= u(e_i) = \sum_{j=1}^{n}(a_{ji})e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Re}(a_{ji}))e_j + \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Im}(a_{ji}))\sqrt{-1}e_j, \\ u_0(\sqrt{-1}e_i) &= \sqrt{-1}u(e_i) = \sum_{j=1}^{n}(\sqrt{-1}a_{ji})e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-\mathrm{Im}(a_{ji}))e_j + \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Re}(a_{ji}))\sqrt{-1}e_j. \end{aligned}$$

于是它对应于 $2n \times 2n$ 实方阵

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{pmatrix}.$$

由定义可知

$$\det(u_0) = \det B.$$

按题设，要给出 $\det B$ 和 $\det A$ 间的关系．为此引进酉方阵

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & \sqrt{-1}I \\ I & -\sqrt{-1}I \end{pmatrix},$$

其中 I 为 $n \times n$ 单位矩阵．由

$$U\overline{U}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & \sqrt{-1}I \\ I & -\sqrt{-1}I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ -\sqrt{-1}I & \sqrt{-1}I \end{pmatrix} = I^{(2n)}$$

可知 $|\det U|^2 = 1$. 令

$$\begin{aligned} UB\overline{U}' &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & \sqrt{-1}I \\ I & -\sqrt{-1}I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ -\sqrt{-1}I & \sqrt{-1}I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & \sqrt{-1}A \\ \overline{A} & -\sqrt{-1}\,\overline{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ -\sqrt{-1}I & \sqrt{-1}I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |\det A|^2 &= \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} = \det UB\overline{U}' \\ &= \det B|\det U|^2 = \det B. \end{aligned}$$

这给出了

$$\det(u_0) = |\det(u)|^2.$$

2.1.3 求函数 $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ ($a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) 在超平面 $\sum_{i=1}^n b_i x = 1$ ($b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$) 上的最小值.

解 注意到所有 a_i 为正实数，作变数代换

$$y_i = \sqrt{a_i} x_i, \qquad 1 \le i \le n,$$

问题化为求函数

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = |y|^2$$

在超平面 π:

$$1 = \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n (b_i/\sqrt{a_i}) y_i$$

上的最小值.

考虑点 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则函数 $|y|^2$ 即为点 y 到原点之距离之平方. 而超平面 π 为

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i = 1,$$

其中

$$c_i = b_i/\sqrt{a_i}, \qquad 1 \le i \le n.$$

于是问题化为求超平面 π 上点，使它到原点之距离之平方为极小.

显然，距离极小当且仅当距离平方极小. 而距离极小之点为原点到超平面 π 之垂足. 因此问题化为计算垂足. 为此要定出和超平面 π 垂直之向量，再在超平面 π 上寻找点 P, 使 $\overrightarrow{OP}$ 和此向量平行.

令超平面 π 之系数 $c_1, \ldots, c_n$ 构成向量 $\vec{r} = (c_1, \ldots, c_n)$. 它和超平面 π 垂直. 事实上，在超平面 π 上任取两不同点 $X = (y_1, \ldots, y_n)$, $Y = (y'_1, \ldots, y'_n)$, 则有 $\sum c_i y_i = 1$, $\sum c_i y'_i = 1$. 因此 $\sum c_i(y_i - y'_i) = 0$. 这证明了 $\vec{r}$ 和超平面 π 上任何向量垂直.

在超平面 π 上取点 $P = (y_1, \ldots, y_n)$, 使 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{r}$ 平行，因此存在实数 a, 使得

$$(y_1, \ldots, y_n) = a(c_1, \ldots, c_n).$$

由于 $\sum c_j y_j = 1$, 代入有 $a\sum_{j=1}^{n} c_j^2 = 1$. 所以求出

$$a = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2},$$

因此垂足坐标为

$$y_i = ac_i = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}, \qquad 1 \le i \le n.$$

所以所求之极小值为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)^2} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)^{-1} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_j}{\sqrt{a_j}}\right)^2\right]^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j^2}{a_j}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

2.1.4 设 $F(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的二次连续可微函数. 已知 $F(x,y)=0$ 的解 (x,y) 的集合是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 "8" 字形图形. 试问: 方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有几组解?

解 最后给出一个例子说明有 3 组解. 先证明在题设条件下方程组至少有 3 组解. 于是我们证明了所求之解数为 3.

下面给出证明之分析. 首先, 作个平移, 于是无妨设 8 字形图之交叉点为原点. 由于 $F(x,y)=0$ 之解构成 8 字形图, 以此 8 字形图为边界的区域之内部, 恰好分为两个不相交的单连通区域. 在每个区域中, 函数 $F(x,y)$ 之值不可能变号. 这是因为零点为边界点. 所以在内部恒正, 或恒负. 无妨设在其中一个区域中, $F(x,y)$ 恒取正值, 因此必有最大值, 且在内点达到. 由于最大值为正, 且 $F(x,y)$ 二次连续可微, 所以在此最大值点上有 $\partial F/\partial x=0$, $\partial F/\partial y=0$, 即为所求的一个解. 在另一区域中同样讨论, 便证明了在 8 字形图形所围成之两区域中至少共有方程组 $\partial F/\partial x=0$, $\partial F/\partial y=0$ 之两个解.

余下讨论原点, 如果在原点有 $\partial F/\partial x \ne 0$, 则由隐函数存在定理, $F(x,y)=0$ 之解在原点附近可表为 $x=f(y)$, 其中 f 为单值函数. 所以不可能出现原点为交叉点的情形. 这推出矛盾. 因此证明了在原点必有 $\partial F/\partial x=0$. 同理可证

在原点必有 $\partial F/\partial y=0$. 因此原点为所讨论之方程组 $\partial F/\partial x=0, \partial F/\partial y=0$ 之解. 所以证明了对任一 8 字形图, 至少有 3 组解.

下面举例说明存在函数 $F(x,y)$ 满足题设条件, 且所论方程组恰有 3 组解. 考虑平面上两个圆, 它们以 y 轴为公切线, 切点为原点. 即可作

$$F(x,y)=((x-1)^2+y^2-1)((x+1)^2+y^2-1).$$

这样一来, $F(x,y)=0$ 之解恰好为 8 字形图. 而

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=2(x-1)((x+1)^2+y^2-1)+2(x+1)((x-1)^2+y^2-1)\\&=2(x^2-1)((x+1)+(x-1))+2(y^2-1)((x+1)+(x-1))\\&=4x(x^2+y^2-2)\\\frac{\partial F}{\partial y}&=2y((x+1)^2+y^2-1)+2y((x-1)^2+y^2-1)\\&=4y(y^2-1)+4y(x^2+1)=4y(x^2+y^2).\end{aligned}$$

于是由 $\partial F/\partial y=0$ 可推出 $y=0$ 或 $x=y=0$. 总之解为 $(x,0)$. 又由 $\partial F/\partial x=0$ 可推出 $x=0$ 或 $x^2+y^2=2$. 于是方程组 $\partial F/\partial x=0, \partial F/\partial y=0$ 之解为 $y=0, x=0$ 或 $y=0, x=\pm\sqrt{2}$, 即恰好 3 组解

$$(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0).$$

至此完全证明了断言, 即按题设至少 3 组解.

2.1.5 设实系数多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于实值函数 $f(x)$, 试证 $f(x)$ 也是多项式.

分析 关于多项式序列一致逼近连续函数, 我们知道有著名的 Weierstrass 逼近定理: 有限区间 $[a,b]$ 上的任一连续函数 $f(x)$ 可用多项式序列 $\{Q_n(x)\}$ 在此区间上一致逼近, 即, 收敛 $\lim\limits_{n\to+\infty}Q_n(x)=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是一致的.

此定理与我们这里的命题的不同之处仅在于所考虑的定义域: 前者是有限的, 后者是无限的. 因此, 证明这里的命题的关键必然在于定义区间的无界性以及多项式在无限区间上的特性. 非常数的多项式在有限区间上与在无限区间上的一个显著的差别为: 它在有限区间上是有界的, 而在无限区间上是无界的.

多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 由 Cauchy 关于函数序列一致收敛的充要条件知，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在与 $x \in \mathbb{R}$ 无关的数 N, 当 $m,n > N$ 时，不等式

$$|P_m(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 记 $P_{m,n}(x) = P_m(x) - P_n(x)$, 则 $P_{m,n}(x)$ 也是一多项式. 如果 $P_{m,n}(x)$ 不是常数，则有

$$\lim_{|x|\to+\infty} |P_{m,n}(x)| = +\infty$$

(这就是无限区间上的非常数多项式的一个特性). 至此，离结论已不远了.

证明 设多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 因此，存在自然数 N_0, 使得当 $m, n \geq N_0$ 时有

$$|P_m(x) - P_n(x)| < 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

记 $P_n(x) = \sum_{j=0}^{d_n} p_j^{(n)} x^j$, 其中

$$p_j^{(n)} \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, 2, \ldots, d_n,\ p_{d_n}^{(n)} \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots;$$
$$P_{m,n}(x) = P_m(x) - P_n(x),\ m, n = 1, 2, \ldots.$$

我们断言，当 $m, n \geq N_0$ 时 $P_{m,n}(x)$ 为常数，即当 $m, n \geq N_0$ 时， $d_m = d_n$, $p_j^{(m)} = p_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, d_m$.

事实上，如果存在 $m, n \geq N_0$, 使得 $P_{m,n}(x)$ 不是常数，则由于 $P_{m,n}(x)$ 是一个多项式，因此

$$\lim_{|x|\to+\infty} |P_{m,n}(x)| = +\infty.$$

这与 $|P_{m,n}(x)| = |P_m(x) - P_n(x)| < 1\,(\forall x \in \mathbb{R})$ 矛盾. 因而对所有 $m, n \geq N_0$, $P_{m,n}(x)$ 为常数. 但

$$P_{m,n}(x) = P_m(x) - P_n(x) = \sum_{j=0}^{d_m} p_j^{(m)} x^j - \sum_{j=0}^{d_n} p_j^{(n)} x^j,$$

所以 $m, n \geq N_0$ 时 $d_m = d_n$, $p_j^{(m)} = p_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, d_m$.

由于一个序列中的有限项不影响其极限，因此不妨设存在 $d \in \mathbb{N}$, $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, 使得 $d_n = d$, $p_j^{(n)} = p_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$; $n = 1, 2, \ldots$. 故

$$P_n(x) = p_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{d} p_j x^j, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

显然，

$$
\begin{aligned}
&\text{序列 } \{P_n(x)\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上一致收敛于函数 } f(x) \\
&\Longleftrightarrow \text{序列 } \{p_0^{(n)}\} = \left\{P_n(x) - \sum_{j=1}^{d} p_j x^j\right\} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上,} \\
&\qquad \text{一致收敛于 } f(x) - \sum_{j=1}^{d} p_j x^j \\
&\Longleftrightarrow \text{序列 } \{p_0^{(n)}\} \text{ 收敛于某实数 } p_0 \in \mathbb{R}, \\
&\qquad \text{并且 } f(x) - \sum_{j=1}^{d} p_j x^j = p_0, \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

因此 $f(x) = \sum_{j=0}^{d} p_j x^j$ 是一个多项式.

2.1.6 求出使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 及最小的数 β:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$$

分析 所要求满足的不等式是关于离散变量 $n \in \mathbb{N}$ 的不等式. 为了便于处理, 亦即为了能利用微积分中的一些方法, 可把离散的变量连续化: 把自然数集 $\mathbb{N}$ 扩充为实数的无限区间 $[1,+\infty)$ (即 $n \in \mathbb{N} \to x \in [1,+\infty)$), 或者, 把 $\mathbb{N}$ 置于区间 $(0,1]$ 之中 (即 $n \in \mathbb{N} \to y = 1/x \in (0,1]$).

以 λ 表示 α 或 β, 则要由

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\lambda} \sim e, \qquad x \in [1,+\infty)$$

("$\sim$" 表示 $\le$ 或 $\ge$) 来定出 λ. 而

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\lambda} \sim e &\Longleftrightarrow (x+\lambda)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim 1 \\
&\Longleftrightarrow x+\lambda \sim 1 \Big/ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&\Longleftrightarrow \lambda \sim \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} - x,
\end{aligned}
$$

因此, 如果函数 $f(x) = (1/\ln(1+1/x)) - x$ 在区间 $[1,+\infty)$ 中是单调函数, 则 $\{\alpha,\beta\} = \{f(1), f(+\infty)\}$; 如果 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中不是单调函数, 但 $f(x)$ 在 $x = n \in \mathbb{N}$ 处达到其最小 (或最大) 值, 则 $\alpha = n$ (或 $\beta = n$); 如果 $f(x)$ 在 $x_0 \notin \mathbb{N}$ 处达到其最小 (或最大) 值, 那么此时要再深入地考察函数 $f(x)$, 找到

自然数 n, 使得 $f(n)=\min\limits_{x\in\mathbb{N}} f(x)$ (或 $f(n)=\max\limits_{x\in\mathbb{N}} f(x)$). 很可能 $n=[x_0]$, 或者 $n=[x_0]+1$, 也可能 n 为别的自然数.

解法 1 由于

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}\\
\Longleftrightarrow\ &(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le 1\le(n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \forall n\in\mathbb{N}\\
\Longleftrightarrow\ &\alpha\le\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\le\beta, \qquad \forall n\in\mathbb{N},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\alpha=\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right), \qquad \beta=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right).
$$

令

$$
f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}, \qquad x\in(0,1].
$$

下面证明: $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 中严格单调减. 因而,

$$
\alpha=f(1), \quad \beta=\lim_{x\to 0_+} f(x).
$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-\frac{1}{[\ln(1+x)]^2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}\\
&=\{(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2\}/\{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2\}.
\end{aligned}
$$

令 $g(x)=(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2$, 则

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=2\ln(1+x)+[\ln(1+x)]^2-2x,\\
g''(x)&=\frac{2}{1+x}+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-2\\
&=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0, \quad x\in(0,1].
\end{aligned}
$$

所以 g' 在 $(0,1]$ 中严格单调减. 由于 $g'(0)=0$, 所以 $g'(x)<0$, $\forall x\in(0,1]$. 因而 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 中亦严格单调减. 又 $g(0)=0$, 所以 $g(x)<0$, $\forall x\in(0,1]$.

在 $f'(x)$ 的表达式中, 显然分母在 $(0,1]$ 中是正的, 而分子为 $g(x)$, 因而

$f'(x)<0, \forall x\in(0,1]$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 中严格单调减. 这样,

$$\begin{aligned}\alpha &= f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1,\\ \beta &= \lim_{x\to 0_+} f(x)=\lim_{x\to 0_+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]\\ &=\lim_{x\to 0_+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}\\ &=\lim_{x\to 0_+}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{1+1+\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法 2 与解法 1 同, 知

$$\alpha=\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n\right),\qquad \beta=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n\right),$$

令

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-x,\qquad x\in[1,+\infty).$$

则 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 中严格单调增, 因此

$$\alpha=f(1),\quad \beta=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

事实上,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-1=\frac{1}{x(x+1)\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2}-1\\ &=\frac{1-x(x+1)\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2}{x(x+1)\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2}.\end{aligned}$$

令 $g(x)=1-x(x+1)[\ln(1+(1/x))]^2$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big/\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}\Big/-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1-\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\left[(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0.$$

又

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(x+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2-x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2+2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \left[2-(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= h(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

其中 $h(x)=2-(2x+1)\ln\left(1+(1/x)\right)$. 有

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{2x+1}{x(x+1)} \\ &= -2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}, \\ h''(x) &= \frac{2}{x(x+1)}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2(x+1)^2}<0, \qquad x\in[1,+\infty), \end{aligned}$$

所以 $h'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中严格单调减. 又

$$\lim_{x\to+\infty}h'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right]=0,$$

所以 $h'(x)>0$, $x\in[1,+\infty)$. 因而 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中严格单调增. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}h(x) &= 2-\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2-\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}=0, \end{aligned}$$

所以 $h(x)<0, \forall x\in[1,+\infty)$, 因而 $g'(x)<0$, $x\in[1,+\infty)$, 所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中严格单调减. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 所以 $g(x)>0$, $x\in[1,+\infty)$.

在 $f'(x)$ 的表达式中，显然分母在 $[1,+\infty)$ 中是正的，而分子为 $g(x)$, 因而 $f'(x)>0, x\in[1,+\infty)$. 所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中严格单调增. 因此，

$$\alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1,$$

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x(x+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{[x(x+1)]^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x+1)^2} \cdot \frac{[x(x+1)]^2}{2x+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

说明 1. 从解法 1 和解法 2 的比较可以看出，把离散变元 $n\in\mathbb{N}$ 的函数 $1/[\ln(1+1/n)]-n$ 化为连续变元的函数时，变元的选择与其后运算的繁易程度有关. 在此题中，视 $1/n$ 为 x 为宜 ($x\in(0,1]$).

2. 在一开始的分析中，还假设了

$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$$

在区间 $[1,+\infty)$ 中可能不是单调函数. 这是做题前对各种可能发生的情形的分析. 有备无患，如果真的发生了这种情形，也可按事先所设想的处理方式行事，做不通时再另找途径.

2.1.7 计算四重积分

$$\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4,$$

其中 $Q(x)=\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_ix_j$ 是正定的二次型.

解 令 4×4 实对称方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix}$$

正定，所以存在非异实方阵 P 使得

$$A = P'P.$$

作坐标变换

$$y = Px,$$

于是

$$Q = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_i x_j = x'Ax = x'P'Px = (Px)'(Px) = y'y = \sum_{i=1}^{4} y_i^2,$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4 &= \left(\det \frac{\partial y}{\partial x}\right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ &= (\det\ P)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ =& \int_{|y|\le 1} e^{|y|^2}(\det\ P^{-1})\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4. \end{aligned}$$

今 $A = P'P$, 所以 $\det\ A = (\det\ P)^2$. 这证明了

$$\begin{aligned} &\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ =& \frac{1}{\sqrt{\det\ A}} \int_{|y|\le 1} e^{|y|^2}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4. \end{aligned}$$

用球坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\theta, \\ y_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y_3 = r\sin\theta\sin\varphi\cos\psi, \\ y_4 = r\sin\theta\sin\varphi\sin\psi, \end{cases}$$

其中

$$0 \le \psi < 2\pi, \qquad 0 \le \varphi, \theta < \pi,$$

而

$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4 = r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi,$$

又

$$|y|^2 = r^2,$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\\
=&\ \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} e^{r^2}r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\\
=&\ \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_0^1 r^3e^{r^2}\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

今

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 r^3e^{r^2}\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2}\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[xe^x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(e - e^x\,\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2},\\
\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= -\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi} = 2,\\
\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\int_{Q(x)\le 1} e^{Q(x)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det A}}.
$$

2.1.8 设 f, g 是在 $\mathbb{R}^3$ 的区域

$$
D = \left\{ x \;\middle|\; \frac{1}{2} \le \|x\| \le 2 \right\}
$$

中二次连续可微的实函数，它们在球面

$$
S^2 = \{ x \mid \|x\| = 1 \}
$$

的 (中心) 对称点上值相等. 试证：向量场

$$
\operatorname{grad}(f) \times \operatorname{grad}(g)
$$

流进球面 S^2 的通量等于零.

证明 流进球面 S^2 意味着求单位法向量，方向向着球心. 今球面为单位球面，所以单位法向量为 $\vec{O} = (0,0,0) - (x_1, x_2, x_3) = -(x_1, x_2, x_3) = -x$，其中 x 为球面 S^2 上的点. 向量场 $\operatorname{grad}(f)\times\operatorname{grad}(g)$ 流进球面 S^2 之流量为

$$
A = \iint_{S^2} (\operatorname{grad}(f)\times\operatorname{grad}(g))\cdot(-x)\,\mathrm{d}\sigma.
$$

令 $\operatorname{grad}(f)=(\partial f/\partial x_1,\partial f/\partial x_2,\partial f/\partial x_3)$, $\operatorname{grad}(g)=(\partial g/\partial x_1,\partial g/\partial x_2,\partial g/\partial x_3)$, 所以

$$\operatorname{grad}(f)\times\operatorname{grad}(g)=(J,K,L),$$

其中

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3}\end{vmatrix},\quad K=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\end{vmatrix},\quad L=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\end{vmatrix}.$$

于是

$$A=\iint_{S^2}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3}\\ -x_1 & -x_2 & -x_3\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma.$$

为了证明 $A=0$, 需要计算面绕元素 $\mathrm{d}\sigma$. 用球坐标表示 S^2, 有

$$\begin{cases} x_1=\cos\theta, \\ x_2=\sin\theta\cos\varphi, \qquad 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi. \\ x_3=\sin\theta\sin\varphi, \end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta}=-\sin\theta,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\theta}=\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial x_3}{\partial\theta}=\cos\theta\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}=-\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial x_3}{\partial\varphi}=\sin\theta\cos\varphi,$$

因为

$$E=\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial\theta}\right)^2=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial\varphi}\right)^2=\sin^2\theta,$$

$$F=\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial x_2}{\partial\theta}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}+\frac{\partial x_3}{\partial\theta}\frac{\partial x_3}{\partial\varphi}=0,$$

于是

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{S^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix} \cdot |\sin\theta| \, \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

今由

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \theta} & \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \\ \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \theta} & \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

即知

$$
h \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial \theta}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ x_1\frac{\partial x_1}{\partial \theta} & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix}
$$

可化为

$$\frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta} & \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial f}{\partial x_3}\\ x_1\frac{\partial x_1}{\partial\theta}+x_2\frac{\partial x_2}{\partial\theta}+x_3\frac{\partial x_3}{\partial\theta} & x_2\frac{\partial x_2}{\partial\varphi} & x_3\\ \frac{\partial g}{\partial\theta} & \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial g}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta} & \frac{\partial f}{\partial\varphi} & \frac{\partial f}{\partial x_3}\\ \sum x_i\frac{\partial x_i}{\partial\theta} & \sum x_i\frac{\partial x_i}{\partial\varphi} & x_3\\ \frac{\partial g}{\partial\theta} & \frac{\partial g}{\partial\varphi} & \frac{\partial g}{\partial x_3}\end{vmatrix}.$$

今

$$\begin{aligned}\sum x_i\frac{\partial x_i}{\partial\theta} &= (\cos\theta)(-\sin\theta)+(\sin\theta\cos\varphi)(\cos\theta\cos\varphi)\\ &\quad+(\sin\theta\sin\varphi)(\cos\theta\sin\varphi)=0,\\ \sum x_i\frac{\partial x_i}{\partial\varphi} &= (\sin\theta\cos\varphi)(-\sin\theta\sin\varphi)\\ &\quad+(\sin\theta\sin\varphi)(\sin\theta\cos\varphi)=0,\end{aligned}$$

所以

$$h=-\frac{x_3}{\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta} & \frac{\partial f}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial g}{\partial\theta} & \frac{\partial g}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}-\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{-|\sin\theta|}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}-\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\\ &\quad-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

令 $\tau=\theta-\pi$, 则

$$\begin{aligned}&-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\\ &= -\int_0^{\pi}\mathrm{d}\tau\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\tau}-\frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

所以当 $f=f(\theta,\varphi)$ 有

$$f(\tau-\pi,\varphi)=f(\tau,\varphi),\quad g=g(\theta,\varphi),\quad g(\tau-\pi,\varphi)=g(\tau,\varphi),$$

则有积分为零.

第二试

2.2.1 (a) 证明有理点 (即 x,y 坐标都是有理数的点) 在 $\mathbb{R}^2$ 的圆周 $x^2+y^2=1$ 上处处稠密;

(b) 上述结论能否推广到单位球面 S^{n-1} $(n\geq 3)$ 上? 能否推广到代数曲线 $P(x,y)=0$ 上? 其中 P 是有理系数的多项式.

证法 1 (a) 先证有理点在单位半圆周上处处稠密. 那么, 由于对称性, 有理点在单位圆周上处处稠密.

事实上, 半圆周上点可表为

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\qquad 0\leq\theta<\pi.$$

记

$$t=\tan\frac{\theta}{2},$$

于是

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

而且 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 为有理点当且仅当 t 为有理数. 这是因为

$$(1+t^2)\cos\theta=1-t^2,\qquad (1+t^2)\sin\theta=2t.$$

前式保证了: 当 $\sin\theta,\cos\theta\in\mathbb{Q}$ 时, 有

$$t^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\in\mathbb{Q};$$

后式保证了

$$t=\frac{1}{2}(\sin\theta)(1+t^2)\in\mathbb{Q}.$$

今对半圆周上任一点 $(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$, $0\leq\theta_0<\pi$, 有实数 $t_0=\tan(\theta_0/2)$ 与其对应. 熟知存在有理数序列 $\{t_n\}$, $t_n\to t_0$. 记

$$\cos\theta_n=\frac{1-t_n^2}{1+t_n^2},\qquad \sin\theta_n=\frac{2t_n}{1+t_n^2}.$$

于是 $(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$ 为有理点. 当 $n\to\infty$ 时, 极限为

$$\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}=\cos\theta_0,\qquad \frac{2t_0}{1+t_0^2}=\sin\theta_0.$$

这证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=\sin\theta_0,\qquad \lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=\cos\theta_0.$$

因此单位圆周上有理点处处稠密.

(b) 为了讨论问题 (b), 我们来分析问题 (a) 之证明. 实际上, 在 $\mathbb{R}^n$ 中任给曲面. 设此曲面有如下参数表示

$$x_i=f_i(u_1,\ldots,u_{n-1}),\qquad 1\le i\le n,$$

其中 $u_1,\ldots,u_{n-1}\in\mathbb{R}$. 如果 $f_i(u_1,\ldots,u_{n-1})$ 为 $u_1,\ldots,u_{n-1}$ 的具有有理系数的有理函数, 即为两个有理系数多项式之商, 且分母在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中无零点, 于是在曲面上任给一点 $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, 便存在 $n-1$ 个实数 $u_1^{(0)},\ldots,u_{n-1}^{(0)}$, 使得

$$x_i^{(0)}=f_i\big(u_1^{(0)},\ldots,u_{n-1}^{(0)}\big),\qquad 1\le i\le n.$$

由于实数可用有理数逼近, 故存在 $n-1$ 个有理数序列

$$\{u_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty},\qquad j=1,2,\ldots,n-1,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}u_j^{(k)}=u_j^{(0)},\qquad 1\le j\le n-1.$$

而

$$x_i^{(k)}=f_i\big(u_1^{(k)},\ldots,u_{n-1}^{(k)}\big),\qquad 1\le i\le n$$

仍为有理数, 且 $(x_1^{(k)},\ldots,x_{n-1}^{(k)})$ 在此曲面上. 所以是此曲面之有理点, 它们极限就是给定之任一点 $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$. 这证明了此曲面上有理点处处稠密.

已知对球面 S^{n-1} 有如下参数表示

$$\begin{cases} x_1=\cos\theta_1,\\ x_2=\sin\theta_1\cos\theta_2,\\ \vdots\\ x_{n-1}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\ x_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.\end{cases}$$

注意到 $\sin\theta,\cos\theta$ 可用有理函数参数化, 且分母无零点. 所以证明了 S^{n-1} 上有理点处处稠密.

对代数曲线，则情况不同．我们可以举出很多反例说明它．例如，取

$$P(x,y)=x^3+y^3-1.$$

由于 $x^3+y^3=z^3$ 的整数解只有 $(n,0,n),(0,n,n),n\in\mathbb{Z}$, 所以此代数曲线 $P(x,y)=0$ 的有理点只有 $(1,0)$ 和 $(0,1)$, 显然无处稠密．

分析 要证明有理点在圆周 $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 上处处稠密，只需证明对任意给定的点 $(x,y)\in S^1$ 和任意给定的数 $\varepsilon>0$, 可以找到有理点 $(x_0,y_0)\in S^1\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$, 这里 $\mathbb{Q}$ 为有理数集，使得 $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon$.

另一方面，由于 $x_0\in\mathbb{Q}$, $y_0\in\mathbb{Q}$, 所以 $x_0=p/u$, $y_0=q/v$, $u,v,p,q\in\mathbb{Z}$, $uv\neq 0$, $(p,u)=(q,v)=1$ (这里 (p,u) 表示 p 与 u 的最大公约数)．记 u,v 的最小公倍数为 $w=[u,v]$, 并令 $u_1=w/u$, $v_1=w/v$, 则由 $x_0^2+y_0^2=1$ 得 $(pu_1)^2+(qv_1)^2=w^2$. 由勾股弦数的表达公式，不妨设 $pu_1=2mn$, $qv_1=m^2-n^2$, $w=m^2+n^2$, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, m,n 不全为 0. 因此

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{p}{u}=\dfrac{pu_1}{w}=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}, \\ y_0=\dfrac{q}{v}=\dfrac{qv_1}{w}=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}. \end{cases}$$

不妨设 $m\neq 0$, 令 $r=n/m$, 则 $r\in\mathbb{Q}$, 可得

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{2r}{1+r^2}, \\ y_0=\dfrac{1-r^2}{1+r^2}. \end{cases} \tag{1}$$

因此，只要找到 $r\in\mathbb{Q}$, 使得 $|(2r/(1+r^2))-x|<\varepsilon$, $|((1-r^2)/(1+r^2))-y|<\varepsilon$, 则由于 $(2r/(1+r^2))^2+((1-r^2)/(1+r^2))^2=1$, 所以令 $(x_0,y_0)\in S^1\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ 由 (1) 定义，(a) 即被证明．

至于 (b), 即推广到 S^{n-1} $(n\geq 3)$ 的问题，只需注意对任意的 $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\in S^{n-1}$, 有 $x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+x_n^2=1$. 显然可设 $x_n\neq\pm 1$ (否则 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$, 此时 $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ 本身就是一个有理点)．因此

$$X_1^2+\cdots+X_{n-1}^2=1,\ \text{其中}\ X_i=\frac{x_i}{\sqrt{1-x_n^2}},\quad i=1,2,\dots,n-1.$$

这样，$(X_1,\dots,X_{n-1})\in S^{n-2}$. 利用归纳法可知，可以用 S^{n-2} 上的有理点来逼近 $(X_1,\dots,X_{n-1})$.

而对于 x_n 和 $\sqrt{1-x_n^2}$, 由于 $x_n^2+\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^2=1$, 由 (a), 亦可用 S^1 上的有理点来逼近 $\left(x_n,\sqrt{1-x_n^2}\right)\in S^1$. 这样，最终 $x_i=X_i\sqrt{1-x_n^2}$ 亦能用有

理数来逼近，$i=1,2,\ldots,n-1$.

对于代数曲线 $P(x,y)=0, P$ 为有理系数多项式，显然可举出例子，使得 $P(x,y)=0$ 上没有有理点，当然更谈不上有理点在其上稠密了. 反例：$P(x,y)=x^2-2$. 则

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid P(x,y)=0\}=\{(\pm\sqrt{2},y) \mid y\in\mathbb{R}\}.$$

证法 2　(a) 给定 $(x,y)\in S^1$. 由于 $(0,\pm1),(\pm1,0)$ 为 S^1 上的有理点，因此不妨设 $x,y\neq 0,\pm1$. 由于 S^1 的对称性，不妨设 $x>0, y>0$.

现证，对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在有理数 $r\in(0,1)$, 使得

$$\left|\frac{2r}{1+r^2}-x\right|<\varepsilon,\qquad \left|\frac{1-r^2}{1+r^2}-y\right|<\varepsilon.$$

这样，即证明了有理点在 S^1 上稠密.

不妨设 $\varepsilon>0$ 充分小，使得

$$0<\min(x-\varepsilon,y-\varepsilon)<\max(x+\varepsilon,y+\varepsilon)<1,$$

并且存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$, 使得当 $(\bar{x},\bar{y})\in S^1$, $\bar{y}>0$, $|\bar{x}-x|<\delta$ 时，有 $|\bar{y}-y|<\varepsilon$ (由于 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及函数 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $(0,1)$ 中的连续性，这是可以做到的). 令

$$f(z)=\frac{2z}{1+z^2},\qquad z\in[0,1],$$

则易知 $f(0)=0$, $f(1)=1$, f 在 $[0,1]$ 中严格单调增. 因此存在 $z_\pm\in(0,1)$, $z_-<z_+$, 使得 $f(z_\pm)=x\pm\delta$. 任取有理数 $r\in(z_-,z_+)$, 则 $f(z_-)<f(r)<f(z_+)$, 即 $|(2r/(1+r^2))-x|<\delta$. 又

$$\frac{1-r^2}{1+r^2}>0,\quad \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2+\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2=1,$$

所以

$$\left(\frac{2r}{1+r^2},\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)\in S^1\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}).$$

由 δ 的选取法可知 $|((1-r^2)/(1+r^2))-y|<\varepsilon$. (a) 得证.

(b) 给定 $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\in S^{n-1}$, $n\geq 2$. 要证：对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在有理点 $(x_1^{(0)},\ldots,x_{n-1}^{(0)},x_n^{(0)})\in S^{n-1}$, 使得 $\left|x_i^{(0)}-x_i\right|<\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n$.

对于 $n=2$, 上述结论已在 (a) 中证明了.

现设对于任意给定的 $(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})\in S^{n-2}$, $n\geq 3$, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在有理点 $(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\ldots,y_{n-1}^{(0)})\in S^{n-2}$, 使得 $\left|y_i^{(0)}-y_i\right|<\varepsilon$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

现设给定 $(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\in S^{n-1}$. 则有

$$x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+x_n^2=1.$$

若 $x_n^2=1$, 则 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0$. 此时取 $x_i^{(0)}=x_i, i=1,2,\dots,n$, 则 $\left(x_1^{(0)},\dots,x_{n-1}^{(0)},x_n^{(0)}\right)$ 为 S^{n-1} 上的有理点，且显然 $\left|x_i^{(0)}-x_i\right|=0<\varepsilon, i=1,2,\dots,n$; 若 $x_n=0$, 则 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=1$, 即 $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\in S^{n-2}$. 由归纳假设，对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在有理点

$$\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots x_{n-1}^{(0)}\right)\in S^{n-2},$$

使得 $\left|x_i^{(0)}-x_i\right|<\varepsilon,\ i=1,2,\dots,n-1$. 令 $x_n^{(0)}=0$, 则 $\left(x_1^{(0)},\dots,x_{n-1}^{(0)},x_n^{(0)}\right)$ 为 S^{n-1} 上的有理点，且显然有 $\left|x_i^{(0)}-x_i\right|<\varepsilon, i=1,2,\dots,n$.

现不妨设 $x_i^2\neq 0,1,\ i=1,2,\dots,n$. 因此，若令

$$X_i=\frac{x_i}{\sqrt{1-x_n^2}},\qquad i=1,2,\dots,n-1.$$

则有 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n-1}^2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)/(1-x_n^2)=1$, 即 $(X_1,X_2,\dots,X_{n-1})\in S^{n-2}$. 由 S^{n-1} 的对称性，不妨设 $0<x_i<1, i=1,2,\dots,n$. 因而 $0<X_i<1, i=1,2,\dots,n-1$. 由归纳假设，存在有理点 $(R_1,R_2,\dots,R_{n-1})\in S^{n-2}$, 使得 $|R_i-X_i|<\varepsilon/2,\ i=1,2,\dots,n-1$.

由于 $x_n^2+\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)^2=1$, 所以 $(x_n,\sqrt{1-x_n^2})\in S^1$. 由 (a), 存在有理数 $r_n,r\in(0,1)$, 使得 $r_n^2+r^2=1$, 并且 $|r_n-x_n|<\varepsilon\sqrt{1-x_n^2}/2$, $|r-\sqrt{1-x_n^2}|<\varepsilon\sqrt{1-x_n^2}/2$.

现令 $r_i=rR_i, i=1,2,\dots,n-1$, 则 $(r_1,\dots,r_{n-1},r_n)$ 为有理点，且

$$\begin{aligned}r_1^2+\cdots+r_{n-1}^2+r_n^2&=r^2\left(R_1^2+R_2^2+\cdots+R_{n-1}^2\right)+r_n^2\\&=r^2+r_n^2=1,\end{aligned}$$

即 $(r_1,\dots,r_{n-1},r_n)\in S^{n-1}$.

现只需证 $|r_i-x_i|<\varepsilon\ (i=1,2,\dots,n)$ 即可. 事实上, $|r_n-x_n|<\varepsilon\sqrt{1-x_n^2}/2<\varepsilon$. 对于 $i=1,2,\dots,n-1$, 有

$$\begin{aligned}|r_i-x_i|&=|rR_i-x_i|=r\left|R_i-\frac{x_i}{r}\right|=r\left|R_i-X_i+X_i-\frac{x_i}{r}\right|\\&\le r|R_i-X_i|+r\left|\frac{x_i}{\sqrt{1-x_n^2}}-\frac{x_i}{r}\right|<\frac{\varepsilon}{2}r+\left|\frac{r-\sqrt{1-x_n^2}}{\sqrt{1-x_n^2}}\right|x_i\\&<\frac{\varepsilon}{2}r+\frac{\varepsilon}{2}x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这样，对于 $n\ge 2$, S^{n-1} 上的有理点在其上稠密.

对于代数曲线 $P(x,y)=0$ 的反例：

令 $P(x,y)=x^2-2$. 则点集

$$\left\{\,(\pm\sqrt{2},y)\;\middle|\;y\in\mathbb{R}\,\right\}$$

中没有有理点. 因此上面所证明的关于 $S^{n-1}\,(n\ge 2)$ 的结论不能推广到代数曲线上.

2.2.2 单位球面 S^2 上任取 100 个大圆，它们最多把 S^2 分割成多少块？

分析 我们从较简单的情形着手，看看从中能受到些什么启发：平面 $\mathbb{R}^2$ 中任意 n 条直线，最多把 $\mathbb{R}^2$ 分割成多少块？

一条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成两块；两条直线最多把 $\mathbb{R}^2$ 分成 4 块：第 2 条直线与第一条直线相交，交点把它分成两部分，而这两部分中的任一部分把第一条直线分平面所成的两块中的一块分成了两块；.... 如果 $n-1$ 条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成了 K 块，那么加上第 n 条直线后最多把 $\mathbb{R}^2$ 分成 $K+n$ 块：使第 n 条直线与前 $n-1$ 条直线都相交，$n-1$ 个不同的交点把第 n 条直线分成 n 部分，这 n 部分中的每一部分把原来的 K 块中的 n 块中的一块分成了两块 (显然，$K\ge n$). 因此，如果 $n-1$ 条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成的块数 K 最多时，如上加入第 n 条直线后，这 n 条直线即把 $\mathbb{R}^2$ 分成最多块数. 由归纳法知，n 条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成的最多块数为 $(n(n+1)/2)+1$.

从上述我们得到的启发为：

1. n 条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成最多块数 $K_n^{(2)}$, 当且仅当其中任意 $n-1$ 条直线把 $\mathbb{R}^2$ 分成最多块数 $K_{n-1}^{(2)}$, 并且另一条直线与这 $n-1$ 条直线各有一个交点，这些交点各不相同.

2. 由 $K_n^{(2)}=K_{n-1}^{(2)}+n$, $n=2,3,\dots$, 及 $K_1^{(2)}=2$ 得到 $K_n^{(2)}=(n(n+1)/2)+1$.

解 我们来讨论更一般的问题：S^2 上 n 个大圆最多能把 S^2 分割成多少块？

显然，一个大圆把 S^2 分成两块；两个大圆必定相交于两点，两个大圆把 S^2 分成 4 块. 加上第 3 个大圆，如它与前两个大圆共有 l 个交点，则此 l 个交点把第 3 个大圆分成 l 个弧段 (不是 $l+1$ 个，这是与直线的情形的不同之处), 每一个弧段把原来 S^2 上 4 块中的一块分成了两块，因此这时 3 个大圆把 S^2 分成 $4+l$ 块. 为了使分成的块数最多，充分必要地，是使交点数 l 最多.

显然，这只需第 3 个大圆与前两个大圆的一共 4 个交点各不相同，即 $l=4$.

假设 $n-1$ 个大圆把 S^2 分成 K 块，与上面所述的理由相同，加上第 n 个大圆后最多把 S^2 分成 $K+2(n-1)$ 块.（第 n 个大圆与前 $n-1$ 个大圆最多可有 $2(n-1)$ 个不同的交点，并且这总是可以达到的. 又，显然 $K\geq 2(n-1)$.）因此，这时为了使 n 个大圆把 S^2 分成最多块数 K_n，充分必要地，有 $K=K_{n-1}$（即 $n-1$ 个大圆把 S^2 分成的最多块数）.

所以得到 $K_n=K_{n-1}+2(n-1)$，$n=2,3,\ldots$；$K_1=2$. 因此

$$\begin{aligned}K_n &= K_{n-1}+2(n-1)\\ &= K_{n-2}+2(n-2)+2(n-1)\\ &= \cdots\\ &= K_1+2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2(n-1)\\ &= 2+2\cdot[1+2+\cdots+(n-1)]\\ &= n(n-1)+2,\qquad n=1,2,\ldots.\end{aligned}$$

故 S^2 上 100 个大圆最多把 S^2 分割成 $K_{100}=100\times 99+2=9\,902$ 块.

说明　以类似的推理不难证明：

1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上 n 个圆周最多把 $\mathbb{R}^2$ 分成 $k_n=n(n-1)+2$ 块；$k_n=k_{n-1}+2(n-1)$，$n=2,3,\ldots$；$k_1=2$.

2. 直线 $\mathbb{R}^1$ 上 n 个点最多把 $\mathbb{R}^1$ 分成 $K_n^{(1)}=n+1$ 块；$K_n^{(1)}=K_{n-1}^{(1)}+1$，$n=2,3,\ldots$；$K_1^{(1)}=2$.

3. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上 n 条直线最多把 $\mathbb{R}^2$ 分成 $K_n^{(2)}=(n(n+1)/2)+1$ 块；$K_n^{(2)}=K_{n-1}^{(2)}+n$，$n=2,3,\ldots$；$K_1^{(2)}=2$.

4 空间 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个平面最多把 $\mathbb{R}^3$ 分成 $K_n^{(3)}=C_{n+1}^1+C_{n+1}^3$ 块；$K_n^{(3)}=K_{n-1}^{(3)}+K_{n-1}^{(2)}$，$n=2,3,\ldots$；$K_1^{(3)}=2$.

5. $m(\geq 1)$ 维空间 $\mathbb{R}^m$ 中 n 个 $m-1$ 维超平面最多把 $\mathbb{R}^m$ 分成 $K_n^{(m)}=\sum_{j=0}^{[m/2]}C_{n+1}^{m-2j}$ 块；$K_n^{(m)}=K_{n-1}^{(m)}+K_{n-1}^{(m-1)}$，$n=2,3,\ldots$；$K_1^{(m)}=2$.（我们规定：当 $k<j$ 时，组合数 $C_k^j=0$.）

2.2.3　证明或举例否定下列命题：“任给自然数的严格增序列 $a_1,a_2,\ldots$，令 $b_n=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$（$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的最小公倍数），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/b_n$ 收敛.”

分析 1　在分析本题时会联想到 b_n 的标准素因数分解式 $b_n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$，其中 $p_1,p_2,\ldots,p_l$ 为不同的素数，$\alpha_j\in\mathbb{N}$，$j=1,2,\ldots,l$. 不难想到：

(1) $b_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, 是一个单调非减序列;

(2) 若 $b_{n+1} > b_n$, 则 $b_{n+1} \geq 2b_n$;

(3) 对于任一 n, 其后至多只能有有限多个 b_i 与 b_n 相等: $b_n = b_{n+1} = \cdots = b_{n+m} < b_{n+m+1}$;

(4) b_n 至少有 n 个不同的约数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(5) 当一个自然数的约数个数充分多时, 此自然数亦充分大 (需给出定量的估计). 因此有理由猜想正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 是收敛的.

特别, 对上述 (5) 作了较精确的定量估计后, 猜想即成为事实了.

解法 1 本题的答案是肯定的, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 收敛.

1. **引理**. 记 $d(n)$ 为 $n \in \mathbb{N}$ 的正因数的个数 (函数 d 称为除数函数). 设 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. 若 $d(n) \geq 2^k$, 则 $n > 2^k \cdot (3/2)^{k/6}$.

2. 引理 $\Longrightarrow$ 本题结论.

由于 $b_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $a_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 是正项级数. 所以,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \text{ 的部分和有上界.}$$

显然, $b_1 = a_1$, $b_2 \geq a_1$, $b_3 \geq a_1$ (注意, 这里只需用到 a_1, a_2, a_3 为自然数).

对于 $i \in \mathbb{N}$, $2^k \leq i \leq 2^{k+1} - 1$, $k \geq 2$, 有

$$b_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i] \geq [a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}] = b_{2^k}.$$

由于 $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$ 各不相同, 且它们都是 b_i 的正因数, 所以 $d(b_i) \geq 2^k$ (注意, 这里只需用到 $a_1, a_2, \ldots$ 是一列互不相同的自然数, 并不需 $a_1, a_2, \ldots$ 是严格增序列这一条件). 由引理得

$$b_i \geq 2^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k/6}.$$

记 $\lambda = (2/3)^{1/6}$, 则 $0 < \lambda < 1$. 因此

$$\frac{1}{b_i} \leq 2^{-k} \cdot \lambda^k, \quad \forall i : 2^k \leq i \leq 2^{k+1} - 1,\ k \geq 2.$$

现设 $n\in\mathbb{N}$, 不妨设 $n\geq 4$. 则存在 $k\geq 2$, 使得 $2^k\leq n\leq 2^{k+1}-1$. 则

$$\begin{aligned}S_x&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\leq\sum_{i=1}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{b_i}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\sum_{l=2}^{k}\sum_{i=2^l}^{2^{l+1}-1}\frac{1}{b_i}\\&\leq\frac{3}{a_1}+\sum_{l=2}^{k}2^l\cdot(2^{-l}\cdot\lambda^l)\quad(\text{由引理})\\&=\frac{3}{a_1}+\sum_{l=2}^{k}\lambda^l<\frac{3}{a_1}+\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l=\frac{3}{a_1}+\frac{1}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}1/b_n$ 收敛.

3. 引理的证明. 对于 $k\geq 2$, 令

$$n_0=\min\{\,n\in\mathbb{N}\ \big|\ d(n)\geq 2^k\,\}.$$

(i) 设 $q_1,q_2,\ldots,q_r$ 为互不相同的素数, β_j 为非负整数, $j=1,2,\ldots,r$, $r\in\mathbb{N}$. 令 $m=q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot q_r^{\beta_r}$, 则易知 $d(m)=\prod_{j=1}^{r}(\beta_j+1)$. (请读者自行证明之.)

因此, 若对 n_0 进行标准素因数分解, 即有

$$n_0=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l},$$

其中 $p_1,p_2,\ldots,p_l$ 为互不相同的素数, $\alpha_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2,\ldots,l$, $l\in\mathbb{N}$, 则由 n_0 的最小性可知: $p_1,p_2,\ldots,p_l$ 为素数序列中的前 l 个素数, 即 $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5,\ldots$, 且 $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_l\geq 1$.

(ii) 在 n_0 的标准素因数分解式中, $l\geq 2$. 事实上, 若 $l=1$, 则 $n_0=2^{\alpha_1}$. 则 $d(n_0)=\alpha_1+1\geq 2^k\geq 4$, 所以 $\alpha_1\geq 3$. 令

$$n_1=2^{\alpha_1-2}\cdot 3,$$

则

$$\begin{aligned}d(\alpha_1)&=(\alpha_1-2+1)(1+1)\\&=2\alpha_1-2=(\alpha_1+1)+(\alpha_1-3)\\&\geq\alpha_1+1=d(n_0)\geq 2^k,\end{aligned}$$

而 $n_1=\frac{3}{4}n_0<n_0$. 这与 n_0 的定义矛盾.

(iii) $\alpha_1<5\alpha_2$. 事实上, 若 $\alpha_1\geq 5\alpha_2$, 则 $\alpha_1\geq 5$. 令

$$n_1=2^{\alpha_1-2}\cdot 3^{\alpha_2+1}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\cdots\cdot p_l^{\alpha_l},$$

则

$$\begin{aligned}
d(n_1) &= (\alpha_1-1)(\alpha_2+2)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_l+1)\\
&\geq (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_l+1) = d(n_0) \geq 2^k,\\
d(n_1) &\geq d(n_0) \Longleftrightarrow (\alpha_1-1)(\alpha_2+2) \geq (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\\
&\Longleftrightarrow \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2 \geq \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1\\
&\Longleftrightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 \geq 3\\
&\Longleftrightarrow 3\alpha_2 + (\alpha_1 - 5\alpha_2) \geq 3,
\end{aligned}$$

由于 (i), (ii), $\alpha_2 \geq 1$ 及假设 $\alpha_1 \geq 5\alpha_2$, 最后的不等式是成立的. 而 $n_1 = 3n_0/4 < n_0$. 这与 n_0 的定义矛盾.

(iv) 记 $\alpha_2' = \sum_{j=2}^{l} \alpha_j$. 由于

$$2^k \leq d(n_0) = \sum_{j=1}^{l}(\alpha_j+1) \leq \prod_{j=1}^{l} 2^{\alpha_j} = 2^{\sum_{j=1}^{l}\alpha_j} = 2^{\alpha_1+\alpha_2'},$$

所以

$$k \leq \alpha_1 + \alpha_2' < 5\alpha_2 + \alpha_2' \leq 5\alpha_2' + \alpha_2' = 6\alpha_2',$$

因此

$$\alpha_1 + \alpha_2' \geq k, \qquad \alpha_2' > \frac{k}{6}.$$

(v) 由 (i), (ii), (iv) 知,

$$n_0 \geq 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2'} = 2^{\alpha_1+\alpha_2'} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha_2'} > 2^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k/6}.$$

因此, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 若 $d(n) \geq 2^k$, $k \geq 2$, 则

$$n \geq n_0 > 2^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k/6}.$$

引理证毕.

说明 1 从命题的证明中我们可以看出, 实际上我们证明了一个比题中命题强的命题:

任给自然数序列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$, 满足 $a_i \neq a_j, \forall i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$, 令 $b_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 收敛.

分析 2 从分析 1 的 (4)(即 b_n 至少有 n 个不同的正约数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$) 得到 b_n 的正约数个数 $d(b_n)$ 的一个下界. 如果它还能有一个表示为 b_n 的函

数形式 $f(b_n)$ 的上界： $d(b_n) \le f(b_n)$, 那么就得到 $f(b_n) \ge n$. 由此也许能得到 $1/b_n$ 的一个上界估计，从而得到分析一中的结论： $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 收敛.

解法 2 1. 设 $k \in \mathbb{N}$, 则 $d(k) < 2\sqrt{k}$.

事实上，若 $m|k$, $1 \le m < \sqrt{k}$, 则 $(k/m)|k$, 且 $k/m > \sqrt{k}$. 因此，至多除去一个约数外 (即当 k 为平方数时，除去其约数 $\sqrt{k}$), k 的约数可配成对，每对约数的乘积都等于 k, 其中一个小于 $\sqrt{k}$, 一个大于 $\sqrt{k}$. 所以

$$d(k) \le 2(\sqrt{k}-1)+1 < 2\sqrt{k}.$$

由此， $d(b_n) < 2\sqrt{b_n}$, $n=1,2,\ldots$.

2. 显然 $d(b_n) \ge n$, $n=1,2,\ldots$

(这里也只需用到 $a_1, a_2, \ldots$ 为互不相同的自然数).

3. 因此 $2\sqrt{b_n} > n$, 所以 $1/b_n < 4/n^2$, $n=1,2,\ldots$.

由此 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n < \sum_{n=1}^{\infty} 4/n^2 < +\infty$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n$ 收敛.

说明 2 解法 2 比解法 1 简明得多.

2.2.4 设实对称方阵 $A=(a_{ij})$ 的系数 a_{ij} 连续可微地依赖于参数 $t \in \mathbf{R}$, 又设 $A(t)=(a_{ij}(t))$ 的所有不同本征值 $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \cdots < \lambda_r(t)$ 的重数 $m_1, m_2, \ldots, m_r$ $(r \le n)$ 是常数. 试证： $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 t 的连续可微函数.

(提示：反函数定理.)

证明 令

$$F(\lambda,t)=\det(\lambda E - A) = (\lambda-\lambda_1(t))^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r(t))^{m_r}$$

其中对任意 t, $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t)$ 为 $A=A(t)$ 之不同本征值.

今若 $m_1=1$, 任意取定 $t=t_0$ 讨论. 由

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = (\lambda-\lambda_2(t))^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r(t))^{m_r} + \text{含}\,(\lambda-\lambda_1(t))\,\text{之项之和},$$

有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1(t_0)} \ne 0.$$

由反函数定理，在 $\lambda=\lambda_1(t_0)$ 之一邻域中有 $F(\lambda,t)=0$ 之解 $\lambda=\lambda_1(t)$, 它连续可微，这证明了 $\lambda_1(t)$ 在 $t=t_0$ 附近连续可微. 由 t_0 任取，便证明了断言.

今若 $m_1=2$, 这时有

$$\frac{\partial F(\lambda,t)}{\partial\lambda} = 2(\lambda-\lambda_1(t))(\lambda-\lambda_2(t))^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r(t))^{m_r}$$

$$+\text{含}\,(\lambda-\lambda_1(t))^2\,\text{之项之和},$$

$$\frac{\partial^2 F(\lambda,t)}{\partial\lambda^2} = 2(\lambda-\lambda_2(t))^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r(t))^{m_r}$$

$$+\text{含}\,(\lambda-\lambda_1(t))\,\text{之项之和}.$$

由于任意取定 t_0, 则

$$\left.\frac{\partial^2 F(\lambda,t_0)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_1(t_0)} \neq 0.$$

因此由反函数定理可知，在 $\lambda=\lambda_1(t_0)$ 附近方程

$$\frac{\partial F(\lambda,t_0)}{\partial\lambda}=0$$

有解 $\lambda=\widetilde{\lambda_1}(t)$, 它关于参数 t 在 $t=t_0$ 附近连续可微，又 $\widetilde{\lambda_1}(t_0)=\lambda_1(t_0)$, 即

$$\left.\frac{\partial F(\lambda,t)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\widetilde{\lambda_1}(t)} \equiv 0.$$

这就推出 $F(\widetilde{\lambda_1}(t),t)=$ 常数．取 $t=t_0$ 推出常数为零．于是

$$F(\widetilde{\lambda_1}(t),t)=(\widetilde{\lambda_1}(t)-\lambda_1(t))^2(\widetilde{\lambda_1}(t)-\lambda_2(t))^{m_2}\cdots(\widetilde{\lambda_1}(t)-\lambda_r(t))^{m_r}\equiv 0.$$

注意到 $\lambda_1(t_0)\neq\lambda_j(t_0)$, $\forall 2\le j\le r$, 且 $\widetilde{\lambda_1}(t_0)=\lambda_1(t_0)$, 因此 $\widetilde{\lambda_1}(t)\equiv\lambda_1(t)$ 在 t_0 附近成立．由 t_0 任取，便证明了 $\widetilde{\lambda_1}(t)\equiv\lambda_1(t)$, $\forall t$. 证毕.

在 $m_1>2$ 时只要用归纳法，且作 m_1-1 次导数，再对第 m_1 次导数讨论即可．又对 $\lambda_2(t),\ldots,\lambda_m(t)$ 讨论也是用归纳法，由于指标不起决定性作用，所以证明了命题．证毕.

2.2.5 设 $f(\theta)$ 是 R 上周期为 2π 的连续函数，且

$$f(\theta)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

试证：

(a)
$$u_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}r^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$$

在单位圆盘

$$D=\{\,z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\,\}$$

内的紧子集上一致收敛于一个调和函数 $u(x,y)$，其中 $z=re^{i\theta}=x+iy$；

(b)
$$\iint_D \left(u_x^2+u_y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

证明　由 Fourier 级数之定义可知

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad n=0,1,\ldots,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin k\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad n=1,2,\ldots,$$

所以

$$c_k=a_k-\sqrt{-1}b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,e^{-k\theta\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}\theta,$$

因此

$$|c_k|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta<M,$$

其中 M 为正常数.

另一方面，令 $z=x+\sqrt{-1}y=re^{i\theta}$，

$$g(z)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k,$$

则

$$|g(z)|\le\frac{1}{2}|a_0|+M\sum_{k=1}^{\infty}|z|^k.$$

因此任取 $0<r_0<1$, $|z|\le r_0$ 时 $g(z)$ 为全纯函数. 所以记 $z=re^{i\theta}$, $0\le r\le r_0$ 时有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k\right)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left(c_kr^ke^{k\theta\sqrt{-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_kr^k\cos k\theta+b_kr^k\sin k\theta\right)\end{aligned}$$

为调和函数. 所以 u_n 在 D 的紧子集上一致地收敛于调和函数 $\operatorname{Re}g(z)=u(x,y)$.

令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

所以

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(g(z)+\overline{g(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + \overline{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(g(z)+\overline{g(z)}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\frac{\partial g}{\partial z} - \sqrt{-1}\overline{\frac{\partial g}{\partial z}}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4}(g'^2 + \overline{g'^2} + 2g'\overline{g'}) - \frac{1}{4}(g'^2 + \overline{g'^2} - 2g'\overline{g'}) = |g'|^2,$$

于是

$$\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left|\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left|\sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

今取 $j \neq k$, 有

$$\begin{aligned} \iint_D z^j \bar{z}^k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^{j+k} e^{(j-k)\theta\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\frac{1}{j+k+2} r^{j+k+2}\Big|_0^1\right) \frac{1}{(j-k)\sqrt{-1}} e^{(j-k)\sqrt{-1}\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

又

$$\iint_D |z^j|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 r^{2j+1}\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{2j+2} = \frac{\pi}{j+1}.$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \frac{\pi}{k} \\ &= \pi\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k|^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

证毕.

2.2.6 设 A 为 $n \times n$ 实方阵, 试找出 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ 存在的充要条件.

解 注意到方阵 A 是实方阵或是复方阵是无关紧要的, 而我们必须用 Jordan 标准形. 所以我们可以不限 A 是否为实方阵.

记 A 之 Jordan 标准形为

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_s),$$

其中

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I_i^{(e_i)} + N_i^{(e_i)}$$

为 $e_i \times e_i$ Jordan 块，其中 λ_i 为 A 之本征根，I_i 为 e_i 阶单位方阵，N_i 为 e_i 阶幂零方阵，

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

于是存在 $n \times n$ 非异方阵 P，使得

$$A = PJP^{-1}.$$

今

$$\begin{aligned} A^k &= (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1} \\ &= P(\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_s))^k P^{-1} \\ &= P\operatorname{diag}(J_1^k, \ldots, J_s^k)P^{-1}, \end{aligned}$$

其中

$$J_i^k = (\lambda_i I_i + N_i)^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \lambda_i^{k-l} N_i^l.$$

注意到 P 与 k 无关，所以

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} (PJP^{-1})^k = P\left(\lim_{k\to\infty} J^k\right)P^{-1}.$$

而

$$\lim_{k\to\infty} J^k = \operatorname{diag}\left(\lim_{k\to\infty} J_1^k, \ldots, \lim_{k\to\infty} J_s^k\right),$$

因此问题化为求何时 $\lim\limits_{k\to\infty} AJ_i^k$ 存在；若存在，极限是什么？

令

$$J_i^k = (\lambda_i I_i + N_i)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_i^{k-l} N_i^l$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \left[\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda_i^l} (\lambda_i^k) \right] N_i^l.$$

1. 设 $e_i = 1$, 于是

$$J_i^k = \lambda_i^k.$$

因此当 $|\lambda_i| < 1$ 时， J_i^k 之极限为零；当 $\lambda_1 = 1$ 时， J_j^k 之极限为 1; 其余情形，极限不存在.

2. 设 $e_i > 1$, 于是

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}.$$

J_i^k 中元素形如

$$\frac{1}{l!} \left[\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda_i^l} \lambda_i^k \right] N_i^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \lambda_i^{k-l} N_i^l.$$

今 $0 \le l \le e_i$. 取定 l, 则

$$|k(k-1)\cdots(k-l+1)| \le k^l.$$

因此当 $0 < |\lambda_i| < 1$ 时由 $k^l|\lambda_i|^k \to 0$ 可知 $\lim_{k\to\infty} J_0^k = 0$.

3. 设 $e_i > 1$, $\lambda_i = 1$, 则由 $k\lambda_i^{k-1} \to +\infty$ 可知 J_i^k 之极限不存在.

4. 当 $|\lambda_i| > 1$ 或 $|\lambda_i| = 1$, $\lambda_i \ne 1$, λ_i^k 之极限不存在，所以 J_i^k 之极限也不存在.

至此我们证明了对 $n \times n$ 实方阵 A, A^k 之极限 (当 $k \to \infty$) 存在之充要条件为：记 A 之不同本征根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$,

(i) $|\lambda_1| < 1, \cdots, |\lambda_s| < 1$,

(ii) $|\lambda_2| < 1, \cdots, |\lambda_s| < 1, \lambda_1 = 1$ 且对应本征根为 1 之初等因子都是 1 次的.

说明　实际上，我们可以求出其极限值：

1. 当 A 之所有本征根之模小于 1, 则极限为零方阵;

2. 若 A 有本征根 1, 其初等因子都是 1 次的，而其他本征根之模都小于 1. 记 A 之 Jordan 标准形为

$$J = \mathrm{diag}\,(J_1, \ldots, J_t, 1, \ldots, 1),$$

其中 $J_1, \ldots, J_t$ 对应之本征根 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 都在单位圆中，则

$$J^k \to \mathrm{diag}\,(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 0^{(r)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

由于存在 n 阶非异方阵 P 使得

$$A = PJP^{-1},$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} A^k = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}P^{-1}.$$

第三届全国大学生数学夏令营
试题解答

第一试

3.1.1 试求无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$$

的和.

分析 由于

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y},$$

所以当 $|x-y|<\dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$x-y=\arctan\left(\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}\right).$$

因此，如能求得数列 $\{a_n\}$，使得

$$|a_{n+1}-a_n|<\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{n^2+n+1}, \tag{2}$$

则

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=a_{n+1}-a_n,$$

从而如果 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$ 存在的话，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n)\\&=\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_1)=\lim_{k\to\infty}a_k-a_1.\end{aligned}$$

因此解决问题的关键是由 (2) 解得满足 (1) 且使 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k$ 存在的数列 $\{a_n\}$.

解 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{n^2+n+1},\qquad n=1,2,\cdots.$$

则
$$\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_n\cdot\tan a_{n+1}}=\frac{1}{1+n+n^2},\qquad n=1,2,\ldots.$$
令 $b_n=\tan a_n$, $n=1,2,\ldots$, 则有
$$\frac{b_{n+1}-b_n}{1+b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{1}{1+n(n+1)},\qquad n=1,2,\ldots.$$
显然, 数列 $b_n=n$, $n=1,2,\ldots$, 满足上述方程组. 则 $a_n=\arctan n$, $n=1,2,\ldots$, 因为 $0<\arctan(n+1)-\arctan n<\pi/2$, 即 $0<a_{n+1}-a_n<\pi/2$, 所以 $a_{n+1}-a_n=\arctan\left(1/(n^2+n+1)\right)$, $n=1,2,\ldots$. 因此
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_1)\\&=\lim_{k\to\infty}a_k-a_1=\lim_{k\to\infty}\arctan k-\arctan 1\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3.1.2 设实数序列 $\{a_n\}$ 满足
$$(2-a_n)a_{n+1}=1,\quad n=1,2,\ldots.$$
试证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且等于 1.

证法 1 由题设, 必须有 $a_n\neq 0,2$, $n=2,3,\ldots$, 并且 $a_1\neq 2$. 现设 $a_1=0$, 则由归纳法易证 $a_n=(n-1)/n$, $n=1,2,\ldots$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且等于 1. 所以, 无妨设 $a_n\neq 0,2$, $n=1,2,\ldots$. 又若极限存在, 记作 a. 将公式 $(2-a_n)a_{n+1}=1$ 两边取极限, 有 $(2-a)a=1$, 即 $(1-a)^2=0$, 所以 $a=1$. 即极限若存在, 则必等于 1.

于是令
$$b_n=1-a_n,\ n=1,2,\ldots,$$
则有 $b_n\neq\pm1$, $n=1,2,\ldots$, 且若序列 $\{b_n\}$ 之极限存在, 则极限必为 0.

注意原定义关系式变为
$$[2-(1-b_n)](1-b_{n+1})=1,$$
即
$$(1+b_n)(1-b_{n+1})=1,$$

所以 $1-b_{n+1}=1/(1+b_n)$, 即

$$b_{n+1}=1-\frac{1}{1+b_n}=\frac{b_n}{1+b_n}.$$

显然，若某个 $b_m=0$, 则 $b_{m+1}=0$, 依次类推，可证 $b_n=0, n\geq m$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 这证明了断言.

所以下面假设 $b_n\neq 0, n=1,2,\ldots$. 我们来证必有一个自然数 m, 使得 $b_m>0$ 或 $b_m<-1$. 事实上，若对一切自然数 n, 有

$$-1<b_n<0,$$

则由于

$$b_{n+1}-b_n=\frac{b_n}{1+b_n}-b_n=-\frac{b_n^2}{1+b_n}$$

及 $1+b_n>0, -b_n^2<0$, 所以 $b_{n+1}-b_n<0$, 即序列 $\{b_n\}$ 单调递减，且有下界 -1. 所以极限 b 存在，并有

$$b\leq\cdots<b_{n+1}<b_n<\cdots<b_1<0.$$

但若 $\{b_n\}$ 极限存在，则必等于 0, 即 $b=0$. 这与上面关系式 $b<b_1<0$ 矛盾. 所以存在自然数 m, 使 $b_m>0$ 或 $b_m<-1$.

设 $b_m<-1$, 于是 $b_m+1<0, b_m<0$. 因此 $b_{m+1}=b_m/(1+b_m)>0$. 这证明了序列 $\{b_n\}$ 中必有自然数 m, 使 $b_m>0$. 由 $b_{m+1}=b_m/(1+b_m)>0$ 依次类推便证明了

$$b_n>0,\quad n=m,m+1,\ldots.$$

这时 $b_{n+1}-b_n=-b_n^2/(1+b_n)<0$, 所以序列 $\{b_n\}$ 单调递减，且有公共下界 0. 这证明了此序列极限存在，因此必须为零，所以证明了断言. 证毕.

分析　由于条件只有一个：$(2-a_n)a_{n+1}=1, n=1,2,\ldots$, 因此必须充分利用这一系列等式.

首先，从这一系列等式可以得到，如果数列 $\{a_n\}$ 有极限 a, 则极限 $a=1$ (a 为方程 $(2-x)x=1$ 的根，即 $a^2-2a+1=0$, 所以 $a=1$).

其次，为了从 a_n 来确定 a_{n+1}, 我们可把条件改为明显的递推式

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n},\qquad n=1,2,\ldots.\tag{*}$$

因此，当 $a_1=1$ 时，显然有 $a_2=a_3=\cdots=a_n=\cdots=1$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

此外，$a_1 \neq 2$. 否则，以任何实数作为 a_2 都不能满足题设条件 (或等价地，$n=1$ 时的式 (*)).

这样，除去 1 和 2 之后，$\mathbb{R}$ 可分为 3 部分：

$$(-\infty, 1), (1,2) \text{和} (2, +\infty).$$

当 $a_1 \in (2,+\infty)$ 时，由式 (*) 知 $a_2 \in (-\infty,0)$; 而当 $a_1 \in (-\infty,0)$ 时，$a_2 \in (0,1/2)$; $a_1 \in [0,1)$ 时，$a_2 \in [1/2,1)$; (所以 $a_1 \in (-\infty,1)$ 时，$a_2 \in (0,1)$;) 当 $a_1 \in (1,2)$ 时，$a_2 \in (1,+\infty)$.

由于 $f(x) = 1/(2-x)$, $x \neq 2$, 在区间 $(-\infty,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 中都是严格单调增函数，因此当 $a_1 \in (-\infty,1)$ 时数列 $\{a_n\}$ 是单调增的 (且由前述，它有上界 1); 当 $a_1 \in (2,+\infty)$ 时，从第 2 项 a_2 开始，$\{a_n\}$ 是单调增的 (且有上界 1). 因而在这两种情形 $\{a_n\}$ 有极限，为 1.

当 $a_1 \in (1,2)$ 时，也有 $a_2 > a_1$. 由于欲求证者为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, 结合前面已经知道的结论，应该有下面的判断：存在 $k \geq 2$, 使得 $a_k > 2$. 这样，$a_{k+1} < 0$, $a_{k+2} \in (0,1)$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

但必须注意的是，当 $a_1 \in (1,2)$ 时有可能 $a_2 = 2$ (因而无 a_3); 当 $a_{n-1} \in (1,2)$ 时有可能 $a_n = 2$ (因而无 a_{n+1}). 不难知道，

$$a_n = 2 \iff a_{n-1} = \frac{3}{2} \iff a_{n-2} = \frac{4}{3}$$
$$\iff \cdots \iff a_1 = \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1.$$

因而，当 $a_1 \neq (n+1)/n$ 时 $(n \in \mathbb{N})$, 由题设条件所定义的序列 $\{a_n\}$ 有极限，极限为 1.

证法 2 1. 显然应要求：对任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 2$. 我们有结论：存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $a_n = 2$ 的充要条件为 $a_1 = (n+1)/n$.

事实上，

$$a_n = 2 \iff a_{n-1} = \frac{3}{2} \iff a_{n-2} = \frac{4}{3}$$
$$\iff \cdots \iff a_1 = \frac{n+1}{n}.$$

因此，在下面的讨论中恒设 $a_1 \neq (n+1)/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. 若数列 $\{a_n\}$ 有极限 a, 则 $a = 1$.

事实上，在等式

$$(2-a_n)a_{n+1} = 1, \quad n = 1,2,\ldots \tag{1}$$

中令 $n\to\infty$, 则得 $(2-a)a=1$, 即 $a^2-2a+1=0$, 所以 $(a-1)^2=0$, $a=1$.

3. 等式 (1) 显然等价于

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n},\quad n=1,2,\ldots. \tag{2}$$

若 $a_1=1$, 则 $a_n=1$, $n=2,3,\ldots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

4. 当 $a_n\in(-\infty,1)$ 时, $\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots\}$ 是单调增、有上界的数列.

事实上, 当 $a_k\in[0,1)$ 时, 由 (2) 知

$$a_{k+1}\in\left[\frac{1}{2},1\right)\subset[0,1),$$

因而 $a_m\in[0,1)$, $m\geq k$. 所以若 $a_n\in(-\infty,1)$, 由 (2) 知 $a_{n+1}\in[0,1)$, 故 $a_m\in[0,1)$, $m\geq n+1$, 即 $\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots\}$ 有上界 1.

再者, 当 $a_k<2$, $a_k\neq1$ 时, 由 (2) 知

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_k&=\frac{1}{2-a_k}-a_k\\&=\frac{1-2a_k+a_k^2}{2-a_k}=\frac{(1-a_k)^2}{2-a_k}>0,\end{aligned}$$

即 $a_{k+1}>a_k$. 因而, $\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots\}$ 是单调增的.

5. $a_n\in(2,+\infty)$ 时, $\{a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\ldots\}$ 是单调增、有上界的数列.

事实上, 由 (2) 知 $a_{n+1}\in(-\infty,0)$, 再由 4 即得.

6. $a_1\in(1,2)$, $a_1\neq\frac{n+1}{n}$ ($\forall n\in\mathbb{N}$) 时, 存在 $l\geq2$, 使得 $a_l>2$. 因而由 (2) 知 $a_{l+1}\in(-\infty,0)$.

事实上, 由 4 的证明中可知 $a_2>a_1$. 若 $a_2\in(1,2)$, 则亦有 $a_3>a_2$. 因此, 只要 $a_1,a_2,\ldots,a_m\in(1,2)$, 则有 $1<a_1<a_2<\ldots<a_m<2$. 不妨设 $m\geq3$ (否则 $a_3>2$). 记 $\triangle_k=a_{k+1}-a_k$, 有 $\triangle_k=(a_k-1)^2/(2-a_k)$. 所以当 $1\leq k\leq m-2$ 时,

$$\triangle_{k+1}=\frac{(a_{k+1}-1)^2}{2-a_{k+1}}>\frac{(a_k-1)^2}{2-a_k}=\triangle_k>\cdots>\triangle_1.$$

因此, 存在 $l>m$, 使 $a_l>2$.

综上 [1, 3-6] 所述, 当 $a_1=1$ 时, $a_n=1$, $n=2,3,\ldots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$; 当 $a_1\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)-\{(n+1)/n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 时, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得数列 $\{a_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots\}$ 是单调增、有上界的, 因而有极限 a. 由 2, $a=1$.

说明 1. 由 (2), 利用归纳法容易得到: 当 $a_1\in[0,1)$ 时, 对 a_n 可有较确切的估计. 不妨设 $a_1\in[(k-1)/k,\,k/(k+1))$, $k\geq1$, 则有

$a_n \in [(n+k-2)/(n+k-1), (n+k-1)/(n+k)),\ n=1,2,3,\ldots$.

因而，不用事先知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，当 $a_1 \in [0,1)$ 时亦可知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. 如 $a_1 \in (-\infty, 0)$，则由 (2) 知 $a_2 \in [0, 1/2)$. 由上述可知 $a_n \in [(n-2)/(n-1), (n-1)/n),\ n=2,3,4,\ldots$. 因而也有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3. 当 $a_1 \in (1,2),\ a_1 \neq (k+1)/k\,(\forall k \in \mathbb{N})$ 时，不妨设 $(n+2)/(n+1) < a_1 < (n+1)/n,\ n \in \mathbb{N}$. 则由 (2) 知

$$a_2 \in \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n}{n-1}\right), \cdots, a_n \in \left(\frac{3}{2}, 2\right), a_{n+1} > 2.$$

这也可以作为证法 2 中 6 的证明.

4. 证法 2 中的 6 还可有另一证明：设 $a_1 \in (1,2),\ a_1 \neq (k+1)/k,\ \forall k \in \mathbb{N}$. 因为 $a<2,\ a \neq 1$ 时，$a_{m+1} - a_m = (1-a_m)^2/(2-a_m) > 0$，所以 $a_{m+1} > a_m$. 如果 $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < 2$，则数列 $\{a_n\}$ 单调增，有上界 2，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 1$，与证明中的 2 矛盾. 所以存在 $l \geq 2$，使得 $a_l > 2$.

3.1.3 设 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续映射. 证明：如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 和正数 C，使得对所有正整数 n 成立 $|f^n(a)| \leq C$，则 f 有一不动点 x_0，即 x_0 满足 $f(x_0) = x_0$. 这里 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n 个 f) 表示 f 的 n 次复合.

分析 1 映射 f 的不动点 x_0 即方程 $f(x) = x$ 的根. 这里给出的条件是无穷数列 $\{f^n(a)\}$ 有界，因而可以想到证明此题的一个途径：用逐次叠代来解方程 $f(x) = x$，即从已给的特殊数据 a 出发，通过 f 进行叠代：令 $x_1 = a,\ x_2 = f(x_1) = f(a), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = f^{n-1}(a), \ldots$. 这样，可对有界数列 $\{f^n(a)\}$，即 $\{x_n\}$，选出收敛的子序列 $\{x_{n_k} = f^{n_k-1}(a)\}_{k=1}^{\infty}$：$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$，再利用函数 f 的连续性，对递推关系式 $x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$ 取极限 (令 $k \to \infty$)，似乎可得 $x_0 = f(x_0)$. 细一想，其中蕴涵着一个错误！我们只是知道 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$，而并不知道 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1} = x_0$，因而并不能从 $x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$ 得出 $x_0 = f(x_0)$. [例如，$f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ a = 0$，则 $\{f^n(a) \mid n = 1,2,\ldots\} = \{0,1\}$，所以 $|f^n(a)| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. 定义 $x_1 = 0,\ x_n = f(x_{n-1}),\ n = 2,3,\ldots$. 可取 $n_k = 2k$，则当 $k \to \infty$ 时 $x_{n_k} = x_{2k} = 1 \to 1$；而 $n_k + 1 = 2k+1$，所以当 $k \to \infty$ 时 $x_{n_k+1} = x_{2k+1} = 0 \to 0 \neq 1$.]

这里我们遇到了一个困难. 要克服这个困难，必须有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1}$. 然而从所给的条件似乎并不能做到此事. 上面的反例给我们一个启示：如对

f 不再加上什么条件，试图从 $\{f^n(a)\}$ 出发找 f 的不动点是不可能的．而我们又必须从 $\{f^n(a)\}$ 出发来寻找 f 的不动点，或得到一些别的什么 (因为题目的所有条件除了 f 连续之外即是 $\{f^n(a)\}$ 有界)，那么能对 f 再加什么条件呢？用反证法！反证法即对 f 加上了一个假设的条件．再利用上面的想法居然发现 $\{x_n\}$ 本身就是一个收敛序列，因而对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限 (当 $n\to\infty$ 时) 即得 $x_0=f(x_0)$——这与反证法的假设矛盾．

证法 1　设任何 $x\in\mathbb{R}$ 都不是映射 f 的不动点．这样，由 f 的连续性，有 $f(x)>x, \forall x\in\mathbb{R}$; 或有 $f(x)<x, \forall x\in\mathbb{R}$．事实上，若存在 $y_1<y_2$，使得 $f(y_1)>y_1$，而 $f(y_2)<y_2$，或者 $f(y_1)<y_1$，而 $f(y_2)>y_2$，则令 $g(x)=f(x)-x$ 即可知连续函数 $g(x)$ 在 y_1, y_2 处的值异号．由 Bolzano-Cauchy 的中值定理知：存在 $x_0\in(y_1,y_2)$，使 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$．这与 f 无不动点的假设矛盾．

我们不妨设 $f(x)>x, \forall x\in\mathbb{R}$．令 $x_1=a, x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,3,\ldots$．即有 $x_{n+1}=f^n(a), n=0,1,2,\ldots$ (这用归纳法及 f^n 的定义容易得到证明)，其中 $f^0(a)=a$．由条件 $|f^n(a)|\le C, \forall n\in\mathbb{N}$ 知 $\{x_n\}$ 是一个有界数列．

现证 $\{x_n\}$ 是一个严格单调增数列．事实上，对任何 $n\in\mathbb{N}$，由假设 $f(x)>x, \forall x\in\mathbb{R}$，即得 $x_{n+1}=f(x_n)>x_n$．

这样，$\{x_n\}$ 是一个收敛序列．设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$．在等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的两边令 $n\to\infty$，由 f 的连续性即得 $x_0=f(x_0)$，即 x_0 为 f 的不动点．这与反证法的假设 "f 无不动点" 矛盾．

因此，f 有不动点．

分析 2　从证法 1 及其前面的分析中的反例又告诉我们还可通过对 $\{f^n(a)\}$ 的细致分析来完成证明：

1. 如存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $f^n(a)=f^{n-1}(a)$，则不动点已找到．

2. 如对任何 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f^n(a)\ne f^{n-1}(a)$．此时若

(1) 存在 $m\ne n, m,n\in\mathbb{N}$，使得 $f^m(a)>f^{m-1}(a)$, $f^n(a)<f^{n-1}(a)$，则可如 $f(0)=1$, $f(1)=0$ 的情形在 $(0,1)$ 中找到一点 x_0，使 $f(x_0)=x_0$．那样即找到 f 的一个不动点；

(2) 对任何 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f^n(a)>f^{n-1}(a)$，或都有 $f^n(a)<f^{n-1}(a)$，则 $\{f^n(a)\}$ 为单调有界序列，其极限点 x_0 必满足 $f(x_0)=x_0$，如在证法 1 中在反证法的前提下所做的那样．

证法 2　我们证明，在数列 $\{f^n(a)\}$ 的各种可能的情形中 f 都有不动

点.

情形 1. 设存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $f^n(a)=f^{n-1}(a)$. 令 $x_0=f^{n-1}(a)$ (记$f^0(a)=a$). 则由 f^n 的定义可知 $f(x_0)=x_0$. 即 x_0 是 f 的不动点.

情形 2. 设对任何 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $f^n(a)\neq f^{n-1}(a)$. 不妨设 $f(a)>a$. 则或者 $M=\{\,n\in\mathbb{N}\;\big|\;f^n(a)<f^{n-1}(a)\,\}\neq\emptyset$, 或者 $M=\emptyset$.

当 $M\neq\emptyset$ 时, 令 $k=\min\limits_{n\in M}n$. 则 $k>1$, 且 $f^{k-1}(a)>f^{k-2}(a)$, $f^k(a)<f^{k-1}(a)$. 令 $y_1=f^{k-2}(a)$, $y_2=f^{k-1}(a)$, 则

$$y_1<y_2,\quad f(y_1)=f(f^{k-2}(a))=f^{k-1}(a)>f^{k-2}(a)=y_1,$$

$$f(y_2)=f(f^{k-1}(a))=f^k(a)<f^{k-1}(a)=y_2.$$

与证法 1 的开始处相同, 可得: 存在 $x_0\in(y_1,y_2)$, 使 $f(x_0)=x_0$, 即 x_0 是 f 的不动点.

当 $M=\emptyset$ 时, 对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $f^n(a)>f^{n-1}(a)$. 因此, 数列 $\{x_n=f^{n-1}(a)\}$ 是单调增的; 由于 $\{f^n(a)\}$ 是有界的, 因而 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 记作 x_0. 由于 $x_{n+1}=f^n(a)=f(f^{n-1}(a))=f(x_n)$ 以及 f 的连续性, 令 $n\to\infty$ 即得 $x_0=f(x_0)$. 即, 此时 f 亦有不动点. 证毕.

说明 比较证法 1 和证法 2 可以发现, 这两种证法本质上是一样的, 甚至证明中所用的手段也是相同的, 只是证法 2 的情形 1 被证法 1 中的反证法假设所代替.

3.1.4 设 L_1,L_2,L_3 是线性空间, $\alpha\colon L_1\to L_2$ 及 $\beta\colon L_2\to L_3$ 是线性映射. 试证:

$$\dim\alpha(L_1)+\dim\beta(L_2)\le\dim\beta(\alpha(L_1))+\dim L_2.$$

(提示: 问题化为以下的矩阵形式: 设 A 为 $n\times m$ 矩阵, B 为 $m\times p$ 矩阵. 要证: $\operatorname{rk}(A)+\operatorname{rk}(B)\le\operatorname{rk}(AB)+m$. 为此考虑矩阵 $\begin{pmatrix}A&0\\I_m&B\end{pmatrix}$.)

证明 在 L_1 中取基 $e_1,\ldots,e_n$, L_2 中取基 $f_1,\ldots,f_m$, L_3 中取基 $g_1,\ldots,g_p$, 其中 $\dim L_1=n$, $\dim L_2=m$, $\dim L_3=p$. 于是

$$\alpha(e_i)=\sum_j a_{ij}f_j,$$

$$\beta(f_j)=\sum_k b_{jk}g_k,$$

因此

$$\beta(\alpha(e_i)) = \beta\left(\sum_j a_{ij} f_j\right) = \sum_{j,k} a_{ij} b_{jk} g_k.$$

所以线性映射 $\alpha, \beta, \beta \circ \alpha$ 分别对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}, \quad AB.$$

熟知

$$\dim \alpha(L_1) = \mathrm{rk}\,(A), \quad \dim \beta(L_2) = \mathrm{rk}\,(B), \quad \dim \beta(\alpha(L_1)) = \mathrm{rk}\,(AB),$$

所以问题化为求证：

$$\mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B) \le \mathrm{rk}\,(AB) + m.$$

今

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & B \end{pmatrix} \ge \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B).$$

我们希望证明

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\,(AB) + m.$$

事实上，

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} &= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} I^{(n)} & -A \\ 0 & I^{(m)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & B \\ 0 & -I^{(p)} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I_m & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & AB \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rk}\,(AB) + m,
\end{aligned}$$

这里 $I_m, I^{(m)}$ 都表示 m 阶单位方阵. 证毕.

3.1.5 设 A 为 n 阶方阵，$\det(\lambda I-A)=(\lambda-\mu_1)^{r_1}\cdot\cdots\cdot(\lambda-\mu_s)^{r_s}$, 其中 $\mu_1,\ldots,\mu_s$ 为不同复数．试证：存在 λ 的多项式 $f(\lambda)$, 使得对任意 j 有

$$(\lambda-\mu_j)^{r_j}\,|\,(f(\lambda)-\mu_j),$$

并以此证明 $f(A)$ 相似于对角方阵，而 $f(A)-A$ 为幂零方阵．

证明 令

$$f(\lambda)\equiv\mu_j \pmod{(\lambda-\mu_j)^{r_j}},\qquad 1\le j\le s.$$

由 $\mu_1,\ldots,\mu_s$ 两两不同，所以 $(\lambda-\mu_1)^{r_1},\ldots,(\lambda-\mu_s)^{r_s}$ 两两互素，因此

$$\frac{\det(\lambda I-A)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}},\quad (\lambda-\mu_j)^{r_j}$$

互素，所以存在多项式 $f_j(\lambda)$, $g_j(\lambda)$ 使得

$$f_j(\lambda)\frac{\det(\lambda I-A)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}}+g_j(\lambda)(\lambda-\mu_j)^{r_j}=1.$$

这证明了

$$\mu_jf_j(\lambda)\frac{\det(\lambda I-A)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}}\equiv\mu_j \pmod{(\lambda-\mu_j)^{r_j}},\qquad 1\le j\le s.$$

但是

$$\mu_jf_j(\lambda)\frac{\det(\lambda I-A)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}}\equiv 0 \qquad \pmod{(\lambda-\mu_k)^{r_k}},$$

$$k=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,s.$$

所以证明了 λ 之多项式

$$f(\lambda)=\sum_{j=1}^{s}\mu_jf_j(\lambda)\frac{\det(\lambda I-A)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}}$$

有性质

$$f(\lambda)\equiv\mu_j \pmod{(\lambda-\mu_j)^{r_j}},\qquad 1\le j\le s,$$

即

$$(\lambda-\mu_j)^{r_j}\,|\,(f(\lambda)-\mu_j),\qquad 1\le j\le s.$$

这证明了前一断言．

下面证 $f(A)$ 相似于对角形，而 $f(A)-A$ 为幂零方阵．为此记 A 之 Jordan 标准形为

$$J=\mathrm{diag}(J_1,\ldots,J_t),$$

其中

$$J_i = \lambda_i I_i + N_i,$$

这里 λ_i 为 A 之本征根， I_i 为 e_i 阶单位方阵， N_i 为 e_i 阶幂零方阵：

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \mu_1)^{r_1}(\lambda - \mu_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \mu_S)^{r_s}$, 所以对每个 i, $\lambda_i \in \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$. 设 $\lambda_i = \mu_j$, 则 $e_i \leq r_j$. 记

$$f(\lambda) - \mu_k = (\lambda - \mu_k)^{r_k} g_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \ldots, s$$

其中 $g_k(\lambda)$ 为多项式．则

$$f(A) - \mu_k I = (A - \mu_k I)^{r_k} g_k(A).$$

今存在非异常数方阵 P, 使得

$$A = PJP^{-1}.$$

于是

$$f(A) - \mu_k I = f(PJP^{-1}) - \mu_k I = P(f(J) - \mu_k I)P^{-1},$$

而

$$f(J) - \mu_k I = \operatorname{diag}(f(J_1) - \mu_k I_1, \ldots, f(J_t) - \mu_k I_t).$$

另一方面

$$(A - \mu_k I)^{r_k} g_k(A) = P(J - \mu_k I)^{r_k} g_k(J) P^{-1},$$

而

$$\begin{aligned} &(J - \mu_k I)^{r_k} g_k(J) \\ = \ &\operatorname{diag}((J_1 - \mu_k I_1)^{r_k} g_k(J_1), \ldots, (J_t - \mu_k I_t)^{r_k} g_t(J_t)), \end{aligned}$$

于是由

$$f(A) - \mu_k I = (A - \mu_k I)^{r_k} g_k(A)$$

推出

$$f(J) - \mu_k I = (J - \mu_k I)^{r_k} g_k(J),$$

因此推出

$$f(J_i)-\mu_k I_i=(J_i-\mu_k I_i)^{r_k}g_k(J_i),\qquad 1\le i\le t,\quad 1\le k\le s.$$

注意到 J_i 为 $e_i\times e_i$ 矩阵，其中当 $\lambda_i=\mu_k$ 时有 $e_i\le r_k$，而

$$J_i-\mu_k I_i=\lambda_i I_i+N_i-\mu_k I_i=N_i,$$

因此

$$(J_i-\mu_k I_i)^{r_k}=N_i^{r_k}=0.$$

这证明了当 $\lambda_i=\mu_k$ 时 $f(J_i)=\mu_k I_i=\lambda_i I_i, 1\le i\le t$. 所以有

$$f(J)=\operatorname{diag}(f(J_1),\ldots,f(J_t))=\operatorname{diag}(\lambda_1 I_1,\ldots,\lambda_t I_t).$$

因此

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}=P\operatorname{diag}(\lambda_1 I_1,\ldots,\lambda_t I_t)P^{-1},$$

即 $F(A)$ 相似于对角方阵. 注意到

$$J_i=\lambda_i J_i+N_i,$$

所以

$$\begin{aligned}f(J)-J&=\operatorname{diag}(f(J_1)-J_1,\ldots,f(J_t)-J_t)\\&=\operatorname{diag}(\lambda_1 I_1-J_1,\ldots,\lambda_t I_t-J_t)\\&=\operatorname{diag}(-N_1,\ldots,-N_t),\end{aligned}$$

这证明了

$$f(A)-A=P(f(J)-J)P^{-1}=-P\operatorname{diag}(N_1,\ldots,N_t)P^{-1}.$$

显然对 A 之阶 n, 有 $N_i^n=0, 1\le i\le t$. 所以证明了 $(f(A)-A)^n=0$, 即 $f(A)-A$ 为幂零方阵. 证毕.

说明　这是所谓的 Jordan 分解定理的存在性部分. Jordan 定理叙述为：任一 n 阶复方阵 A 必可分解为一个半单方阵 (即相似于对角方阵之方阵) 和一个幂零方阵之和，且半单部分和幂零部分都是 A 之多项式. 分解在半单部分和幂零部分可交换之意义下唯一.

3.1.6　给定 $n\times m$ 实矩阵 A 和 n 维实向量 a. 记 $\mathbb{R}^n$ 中原点到点集

$$\{\,Ax-a\mid x\in\mathbb{R}^m\,\}$$

之最短距离为 d. 试证：$d=|Ax_0-a|$, 其中 x_0 为方程组 $A'Ax=A'a$ 的解.

证明　令原点到点集 $\{\, Ax-a \mid x\in \mathbb{R}^m \,\}$ 中点 $Ax-a$ 之距离为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{|Ax-a|^2} = \sqrt{(Ax-a)'(Ax-a)} \\ &= \sqrt{(x'A'-a')(Ax-a)} = \sqrt{x'A'Ax - a'Ax - x'A'a + a'a} \\ &= \sqrt{x'(A'A)x - 2a'Ax + |a|^2}. \end{aligned}$$

显然，求 $f(x)$ 之极小点，即求 $f(x)^2$ 之极小点，这里

$$f(x)^2 = x'A'Ax - 2a'Ax + aa'.$$

记 $e_i\in \mathbb{R}^m$，它的第 i 个坐标为 1，其余坐标为零．于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)^2}{\partial x_i} &= e_i'A'Ax + x'A'Ae_i - 2a'Ae_i \\ &= 2(x'x'A - a'A)e_i, \quad 1\le i\le m. \end{aligned}$$

熟知在极小点上有 $(\partial f(x)^2)/(\partial x_i) = 0$, $1\le i\le m$, 这证明了极小点坐标必须适合方程组

$$(x'A'A - a'A)e_i = 0, \quad 1\le i\le m,$$

此即行向量 $x'A'A - a'A$ 的第 i 个坐标为零， $1\le i\le m$. 所以

$$x'A'A - a'A = 0,$$

因此证明了使 $f(x)$ 达到极小之点 x_0 必须适合方程

$$A'Ax = A'a.$$

证毕．

说明　此题是导出 "广义逆" 概念的出发点．所谓广义逆矩阵，是为了计算任意线性方程组 $Ax=a$. 虽然它可能不相容，即无解．但可以有最小二乘解，上面这题告诉我们最小二乘解为 $a'Ax = A'a$ 之解．不难证明线性方程组 $A'Ax = A'a$ 必定有解．

第二试

3.2.1　试证：实方阵 A 对称当且仅当 $AA' = A^2$.

证明　见 1.2 的证明．

3.2.2 设多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数 $\leq n$, 关于 y 的次数 $\leq m$. 设存在两组互不相同的数 a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ 和 b_j $(j=0,1,\ldots,m)$, 使得 $f(a_i,b_j)=0$, $i=0,1,\ldots,n$; $j=0,1,\ldots,m$. 试证 $f(x,y)\equiv 0$.

证明 视 $f(x,y)$ 为 x 之多项式, 将它按降幂排为

$$f(x,y)=f_0(y)x^n+f_1(y)x^{n-1}+\cdots+f_n(y),$$

其中 $f_0(y),f_1(y),\ldots,f_n(y)$ 为次数不超过 m 之多项式.

任意取定指标 $j\in\{0,1,\ldots,m\}$, 作多项式

$$g_j(x)=f_0(b_j)x^n+f_1(b_j)x^{n-1}+\cdots+f_n(b_j)=f(x,b_j),$$

由题设及 $f(a_i,b_j)=0$ 有

$$g_j(a_i)=0,\quad 0\leq i\leq n.$$

但是 g_j 之次数不超过 n, 它有 $n+1$ 个不同根, 这推出 $g_j(x)$ 恒等于零, 即证明了

$$f_0(b_j)=f_1(b_j)=\cdots=f_n(b_j)=0.$$

注意到 j 之任意性, 所以对一切 $j=0,1,\ldots,m$, 上式都成立. 可是 $f_0,f_1,\ldots,f_n$ 都是 y 的次数不超过 m 之多项式, 它们都以 $m+1$ 个不同数 $b_0,b_1,\ldots,b_m$ 为根. 这证明了 $f_0,\ldots,f_n$ 也都恒等于零. 由

$$f(x,y)=f_0(y)x^n+f_1(y)x^{n-1}+\cdots+f_n(y)$$

可知 $f(x,y)$ 恒等于零. 证毕.

3.2.3 设 A 为 n 维线性空间 L 上的幂零线性变换. 即存在自然数 N, 使 $A^{N-1}\neq 0$, 而 $A^N=0$. 试证: 在 L 中存在一组基

$$\begin{gathered}\alpha_1, A(\alpha_1),\ldots,A^{N_1-1}(\alpha_1),\ (A^{N_1}(\alpha_1)=0)\\ \vdots\\ \alpha_s, A(\alpha_s),\ldots,A^{N_s-1}(\alpha_s),\ (A^{N_s}(\alpha_s)=0)\end{gathered}$$

其中 $N_1,\ldots,N_s$ 为自然数.

(提示: 先证 $\dim A(L)<\dim L$, 再用第二数学归纳法.)

证明 令 A 为幂零线性变换, 我们来证 A 之本征值为零, 事实上, 若 A 有本征值 λ_0 及本征向量 α, 有 $A\alpha=\lambda_0\alpha$. 于是 $A^N\alpha=\lambda_0^N\alpha$. 由 $A^N=0$ 有 $\lambda_0=0$. 因此证明了

$$\ker(A)=\{\,\alpha\in L\ \big|\ A\alpha=0\,\}\neq\{0\}.$$

熟知

$$\dim L = \dim A(L) + \dim \ker (A),$$

所以由 $\dim \ker (A) > 0$ 可知

$$\dim A(L) < \dim L,$$

考虑真子空间

$$L_1 = A(L).$$

今 $A(L_1) = A(A(L)) \subset A(L) = L_1$, 这证明了 L_1 为 A 之不变子空间. 将 A 限制在 L_1 上, 记作 A_1. 因此

$$A_1^{N-2}(L_1) = A^{N-2}(L_1) = A^{N-2}(A(L)) = A^{N-1}(L) \neq 0,$$
$$A_1^{N-1}(L_1) = A^{N-1}(L_1) = A^{N-1}(A(L)) = A^N(L) = 0,$$

这证明了 $A_1^{N-2} \neq 0$, $A_1^{N-1} = 0$, 即 A_1 仍为幂零线性变换.

对线性变换 A_1 用归纳法假设, 则在 L_1 中有基

$$\begin{array}{ll} \beta_1, A_1\beta_1, \ldots, A_1^{M_1-1}\beta_1, & (A_1^{M_1}\beta_1 = 0) \\ \vdots & \\ \beta_t, A_1\beta_t, \ldots, A_1^{M_t-1}\beta_t, & (A_1^{M_t}\beta_t = 0) \end{array}$$

其中 $M_1, \ldots, M_t$ 为自然数.

今 $\beta_1, \ldots, \beta_t \in L_1 = A(L)$. 故 L 中存在向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, 使得

$$A(\alpha_i) = \beta_i, \qquad 1 \leq i \leq t.$$

将此表达式代入可知 L_1 有基

$$\begin{array}{ll} A(\alpha_1), A^2(\alpha_1), \ldots, A^{M_1}(\alpha_1), & (A^{M_1+1}(\alpha_1) = 0) \\ \vdots & \\ A(\alpha_t), A^2(\alpha_t), \ldots, A^{M_t}(\alpha_t), & (A^{M_t+1}(\alpha_t) = 0) \end{array}$$

这推出它们在 L 中线性无关.

下面证明向量集

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, A(\alpha_1), \ldots, A^{M_1}(\alpha_1), & (A^{M_1+1}(\alpha_1) = 0) \\ \vdots & \\ \alpha_t, A(\alpha_t), \ldots, A^{M_t}(\alpha_t), & (A^{M_t+1}(\alpha_t) = 0) \end{array}$$

在 L 中线性无关. 事实上，若有线性组合

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j} a_{ij}A^i(\alpha_j)=0,$$

双方作用线性变换 A, 便有

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j} a_{ij}A^i(\beta_j)=0.$$

然而已知 $A^{M_j}(\beta_j)=0$, 所以上式为

$$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j-1} a_{ij}A^i(\beta_j)=0.$$

由归纳法假设， $A^i(\beta_j), 0\le i\le M_j-1, 1\le j\le t$ 为 L_1 之基. 这证明了

$$a_{ij}=0,\quad 0\le i\le M_j-1, 1\le j\le t.$$

所以有

$$\sum_{j=1}^{t} a_{M_j j}A^{M_j}(\alpha_j)=0.$$

又由于 $A^{M_j}(\alpha_j)=A^{M_j-1}(\beta_j), 1\le j\le t$ 线性无关，便证明了 $a_{M_j j}=0, 1\le j\le t$. 所以 $A^i(\alpha_j), 0\le i\le M_j, 1\le j\le t$ 在 L 中线性无关.

这批向量中，只有 $A^{M_j}(\alpha_j), 1\le j\le t$ 在 A 作用下变为零，即

$$A^{M_j}(\alpha_j)\in\ker(A),\quad 1\le j\le t.$$

现在任取向量 $\alpha\in L$, 则 $A(\alpha)\in A(L)=L_1$, 所以 $A(\alpha)$ 是 $A^i(\beta_j), 0\le i\le M_j-1, 1\le j\le t$ 之线性组合，即有

$$A(\alpha)=\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j-1} a_{ij}A^i(\beta_j)=\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j-1} a_{ij}A^{i+1}(\alpha_j),$$

所以

$$A\Big(\alpha-\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j-1} a_{ij}A^i(\alpha_j)\Big)=0,$$

即证明了

$$\alpha-\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=0}^{M_j-1} a_{ij}A^i(\alpha_j)\in\ker(A).$$

今 ker (A) 中已有线性无关向量 $A^{M_j}(\alpha_j), 1 \le j \le t$. 我们拼上一批向量 $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$, 使得

$$A^{M_1}(\alpha_1), \dots, A^{M_t}(\alpha_t), \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$$

为 ker (A) 之基. 于是证明了

$$\alpha = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=0}^{M_j - 1} a_{ij} A^i(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{t} a_{M_j j} A^{M_j}(\alpha_j) + \sum_{j=t+1}^{s} a_{0j} \alpha_j,$$

即证明了 α 为下面向量集

$$\begin{array}{llcll}
\alpha_1, & A(\alpha_1), & \dots, & A^{M_1}(\alpha_1), & (A^{M_1+1}(\alpha_1) = 0) \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
\alpha_t, & A(\alpha_t), & \dots, & A^{M_t}(\alpha_t), & (A^{M_t+1}(\alpha_t) = 0) \\
\alpha_{t+1}, & & & & (A(\alpha_{t+1}) = 0) \\
\vdots & & & & \vdots \\
\alpha_s, & & & & (A(\alpha_s) = 0)
\end{array}$$

之线性组合. 所以为了证明这组向量集为基, 只要证明它们线性无关就够了.

事实上, 若我们改记 $N_i = M_i + 1, 1 \le i \le t$; $N_j = 1, t+1 \le j \le s$, 则这个向量集为

$$A^i(\alpha_j), \qquad 0 \le i \le N_j - 1, 1 \le j \le s.$$

如果线性组合

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{N_j - 1} a_{ij} A^i(\alpha_j) = 0,$$

双方作用线性变换 A, 则有

$$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=0}^{N_j - 1} a_{ij} A^i(\beta_j) = 0,$$

所以 $a_{ij} = 0, 0 \le i \le N_j - 1, 1 \le j \le t$. 因此有

$$\sum_{i=t+1}^{s} a_{i0} \alpha_i = 0.$$

但是 $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 故 $a_{i0} = 0, t+1 \le i \le s$. 这证明了 L 也有如题要求之基. 证毕.

说明　这个题目，实际上给出了关于相似下的 Jordan 标准形的空间第二分解定理.

3.2.4　试证明不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} < \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac{1}{2}},$$

其中 a 是任一正数.

分析　熟知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 是概率积分， Poisson 给出了它的简捷算法：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\left[=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-\infty^2})^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上面未入正文的方括号中的形式恰好就是所要求证的不等式左、右两端的形式！（它们分别是以 $a, 2a/\sqrt{\pi}$ 代替方括号中的 ∞ 而得.）

这就提示了题中不等式的证明方法：

把 $\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 表为 $\left(\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^a e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$, 因此

$$\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x=\left(\int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\iint_{Q_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}},$$

这里 Q_a 是正方形 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<a, 0<y<a\}$. 由于被积函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 是正函数, 因此由于 $D_a\subset Q_a$, 这里 $D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<a^2, x>0, y>0\}$, 把积分区域换成 D_a, 即得左面的不等式.

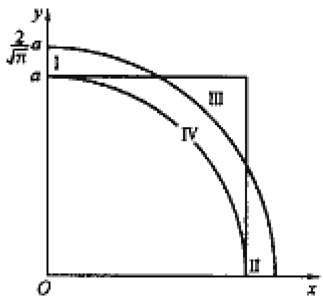


图 3.2.4

然而 $D_{2a/\sqrt{\pi}}\supset Q_a$ 并不成立，所以不能简单地导出右面的不等式. 可以发现， $D_{2a/\sqrt{\pi}}$ 与 Q_a 的面积相等，即它们的不相重叠的部分 $\text{I}\cup\text{II}\subset D_{2a/\sqrt{\pi}}$

与 III $\subset Q_a$ (见图 3.2.4) 有下述关系：$S_{\mathrm{I}\cup\mathrm{II}} = S_{\mathrm{III}}$ (S 表示面积), 并且，I $\cup$ II 中点离原点的距离 $< 2a/\sqrt{\pi} \le$ III 中点离原点的距离，而被积函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 是点 (x, y) 到原点的距离的严格单调减函数. 由这些即可完成右面的不等式的证明.

证明　记

$$Q_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < a, 0 < y < a \right\},$$

$$D_r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < r^2, x > 0, y > 0 \right\}, \; r > 0.$$

则 $D_a \subset Q_a$, $S_{D_a} < S_{Q_a}$; $S_{Q_a} = S_{D_{2a/\sqrt{\pi}}} = a^2$, $S_{\mathrm{I}\cup\mathrm{II}} = S_{\mathrm{III}}$, 其中 S_A 表示图形 A 的面积. 因为

$$\begin{aligned} P_a &= \int_0^a e^{-x^2} \mathrm{d}x = \left(\int_0^a e^{-x^2} \mathrm{d}x \cdot \int_0^a e^{-y^2} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\iint_{Q_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P_a &> \left(\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - e^{-a^2})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

此即要证明的左面的不等式.

此外，当 $(x, y) \in$ III 时，$x^2 + y^2 \ge 4a^2/\pi$, 所以

$$e^{-(x^2+y^2)} \le e^{-\frac{4}{\pi}a^2};$$

当 $(x, y) \in$ I $\cup$ II 时，$x^2 + y^2 < 4a^2/\pi$, 所以

$$e^{-(x^2+y^2)} > e^{-\frac{4}{\pi}a^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} P_a &= \left(\iint_{Q_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\iint_{\mathrm{III}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathrm{IV}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\cdot S_{\mathrm{III}}+\iint_{\mathrm{IV}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\cdot S_{\mathrm{I}\cup\mathrm{II}}+\iint_{\mathrm{IV}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&<\left(\iint_{\mathrm{I}\cup\mathrm{II}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\mathrm{IV}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(\iint_{D_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

这就是右面的不等式.

说明 由于 $Q_a\subset D_{\sqrt{2}a}, S_{Q_a}<S_{D_{\sqrt{2}a}}$, 因此用证明中所用方法可得 $\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x<\sqrt{\pi}\left(1-e^{-2a^2}\right)^{1/2}/2$, 这没有达到欲求证的估计. 好在题目中已给了目标, 这就很自然地利用 $D_{2a/\sqrt{\pi}}$ 代替 $D_{\sqrt{2}a}$.

如果事先未告诉结论, 要你来改进不等式

$$
\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-e^{-2a^2}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

的右端, 你能想得到把 Q_a 与 $D_{2a/\sqrt{\pi}}$ 比较吗?

3.2.5 证明: $(n+1)$ 面体

$$
A=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}}\le 1, x_i\ge 0, i=1,\dots,n\right\}
$$

的体积为

$$
V_A=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^n}{\Gamma(\alpha n+1)},
$$

其中 α 为正数, $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ 为 Euler 积分 Γ 函数.

$\left(\text{提示: 利用公式} B(p,q)=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p>0, q>0.\right)$

分析 显然, $\alpha=1$ 是最简单的情形. 从此情形着手, 看看能得到些什么启示. 我们知道, 此时 A 是 n 维单形, 记其体积为 $V^{(n)}$, 则

$$
V^{(n)}=\int\cdots\int_{\substack{x_1,\dots,x_n\ge 0\\ \sum_{i=1}^n x_i\le 1}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n
$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int \cdots \int_{\substack{x_2,\ldots,x_n \geq 0 \\ x_2+\cdots+x_n \leq 1-x_1}} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$(令 x_j = (1-x_1)\xi_j,\ j=3,\ldots,n)$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int \cdots \int_{\substack{\xi_2,\ldots,\xi_n \geq 0 \\ \xi_2+\cdots+\xi_n \leq 1}} (1-x_1)^{n-1} \mathrm{d}\xi_2 \cdots \mathrm{d}\xi_n$$

$$= \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} \mathrm{d}x_1 \cdot V^{(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot V^{(n-1)},$$

因而，由于 $V^{(1)} = \mathrm{meas}\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = 1$，所以

$$V^{(n)} = \frac{1}{n!} = \frac{(\Gamma(2))^n}{\Gamma(n+1)}.$$

由此可以想到，对于一般的 $\alpha > 0$，由 n 重积分所表示的 A 的体积亦可如求 n 维单形体积那样，先求 $n-1$ 维积分，再求一维积分．可作变数变换把 $n-1$ 维积分化为一个 x_1 的函数乘以 $n-1$ 维的 A 的体积，求出此 x_1 的函数的积分，则得到 n 维 A 的体积与 $n-1$ 维 A 的体积之间的一个递推关系，最终可求得 n 维 A 的体积．

证　记 $n+1$ 面体 A 的体积为 $V^{(n)}$，则

$$V^{(n)} = \int \cdots \int_{\substack{x_1,\ldots,x_n \geq 0 \\ x_1^{1/\alpha}+\cdots+x_n^{1/\alpha} \leq 1}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int \cdots \int_{\substack{x_2,\ldots,x_n \geq 0 \\ x_2^{1/\alpha}+\cdots+x_n^{1/\alpha} \leq 1-x_1^{1/\alpha}}} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$(令 x_j = (1-x_1^{1/\alpha})^{\alpha}\xi_j,\ j \geq 2)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int \cdots \int_{\substack{\xi_2,\ldots,\xi_n \geq 0 \\ \xi_2^{1/\alpha}+\cdots+\xi_n^{1/\alpha} \leq 1}} \left(1-x_1^{1/\alpha}\right)^{(n-1)\alpha} \mathrm{d}\xi_2 \cdots \mathrm{d}\xi_n$$

$$= \int_0^1 \left(1-x_1^{1/\alpha}\right)^{(n-1)\alpha} \mathrm{d}x_1 \cdot V^{(n-1)}.$$

然而

$$\int_0^1 (1-x_1^{1/\alpha})^{(n-1)\alpha} \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 (1-t)^{(n-1)\alpha} \cdot \alpha t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha \int_0^1 (1-t)^{[(n-1)\alpha+1]-1} t^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha\Gamma(\alpha)\Gamma((n-1)\alpha+1)/\Gamma(n\alpha+1)$$
$$= \Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)/\Gamma(n\alpha+1),$$

(由分部积分易知

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{(\alpha+1)-1}\mathrm{d}x = \alpha\Gamma(\alpha).)$$

所以

$$\begin{aligned}
V^{(n)} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}V^{(n-1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-2)\alpha+1)}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \cdot V^{(n-2)} \\
&= \cdots \\
&= (\Gamma(\alpha+1))^{n-1} \cdot V^{(1)} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma((n-1)\alpha+1)\cdot\Gamma((n-2)\alpha+1)\cdots\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)\cdot\Gamma((n-1)\alpha+1)\cdots\Gamma(2\alpha+1)} \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha+1))^n}{\Gamma(n\alpha+1)},
\end{aligned}$$

由于 $V^{(1)} = \mathrm{meas}\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 \right\} = \mathrm{meas}\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \right\} = 1.$

说明 由于题中已有了 $n+1$ 面体 A 的体积的表达式，则也可用数学归纳法来证明它：

显然，$V^{(1)} = 1 = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$.

现设 $V^{(n-1)} = \dfrac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}$. 则由证明中可知

$$\begin{aligned}
V^{(n)} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}V^{(n-1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} \cdot \frac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha+1))^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

即题中 $n+1$ 面体 A 的体积表达式是正确的.

当然，这两种证法本质上是一样的.

3.2.6 设 S 是三维欧氏空间中的一个球帽. 试证: 不存在从 S 到平面的保距映射. 这里球帽上两点 A, B 之间的距离 $\rho(A, B)$ 是指通过这两点的劣大圆弧的长度.

(提示: 用一张平面在 S 上割出一个圆, 在该圆中找一个内接正方形.)

证法 1 用一张平面在 S 上割出一个圆. 熟知在圆上存在四点, 构成一个圆内接正四边形. 记此四点依次为 A, B, C, D (见下页图 3.2.6(a)), 其中 $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = a$. 注意到球面上两点决定之大圆有如下性质: 等弦决定的劣大圆弧 (我们只考虑小半球帽就可以了. 由于是球帽, 所

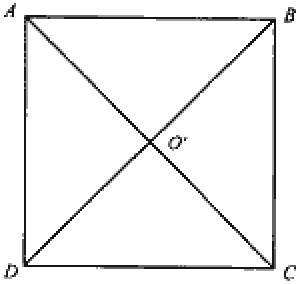


图 3.2.6 (a)

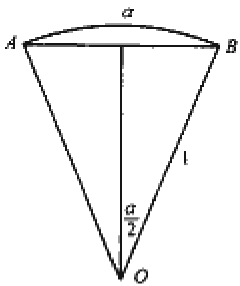


图 3.2.6 (b)

以在过球心之某一平面之一侧, 所以劣大圆弧在此球帽上) 相同. 设球半径为 1, 球心为 O, 由平面所截圆的圆心为 O'. 记 $|OO'| = b$, 则 $b < 1$. 由于 OO' 垂直于所给之平面, 所以 $|CO'|^2 = 1 - b^2$, 因此 $|AC| = 2\sqrt{1-b^2}$, 因而 $2a^2 = |AC|^2 = 4(1-b^2)$, 即 $a = \sqrt{2(1-b^2)}$.

设过 A, B 两点之劣大圆弧长为 α, 则 (见图 3.2.6 (b))

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\overline{AB}| = \frac{1}{2}a,$$

即

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}a\right).$$

记以 A, C 两点为顶点之劣大圆弧长为 β, 则

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}|\overline{AC}| = \sqrt{1-b^2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\beta = 2\arcsin\sqrt{1-b^2} = 2\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

即我们有

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{a}{2}\right), \quad \beta = 2\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

如果存在从 S 到平面上的保距变换 σ, 记平面上点 $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $C' = \sigma(C)$, $D' = \sigma(D)$, 于是有

$$|A'B'| = |B'C'| = |C'D'| = |D'A'| = \alpha,$$
$$|A'C'| = |B'D'| = \beta.$$

因此 A',B',C',D' 构成平面上正方形，边长为 α, 对角线长为 β. 于是有

$$2\alpha^2 = \beta^2,$$

即

$$\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{a}{2}\right) = \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}},$$

其中 $0 < a < 1$.

我们来证上述方程关于自变量 a 无解. 令 $0 < a < 1$, 所以 $0 < a/\sqrt{2} < 1/\sqrt{2}$. 令 $\theta = \arcsin(a/\sqrt{2})$, 则

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4},$$

且 $\theta = \sqrt{2}\arcsin(\sin\theta/\sqrt{2})$, 即

$$\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}.$$

令 $f(\theta) = (\sin\theta/\sqrt{2}) - \sin(\theta/\sqrt{2})$, 则 $f'(\theta) = (\cos\theta/\sqrt{2}) - \cos(\theta/\sqrt{2})/\sqrt{2} = (\cos\theta - \cos(\theta/\sqrt{2}))/\sqrt{2} < 0$, 所以 $f(\theta)$ 严格单调递减. 又 $f(0) = 0$. 这证明了 $f(\theta) > 0$, $0 < \theta < \pi/4$. 所以不存在 $\theta \in (0, \pi/4)$ 适合上方程，因此不存在 $a \in (0,1)$, 使得 $\sqrt{2}\arcsin(a/2) = \arcsin(a/\sqrt{2})$. 这证明了不存在这种保距变换. 证毕.

分析 提示所述可能已经给出了一个证明的大概：所作的内接正方形的四个顶点在球面上也是一个 "正方形"[四条 "球面边" (即大圆弧) 的长度相等，并且其 "球面对角线" (亦为大圆弧) 的长度亦相等] 的四个顶点. 因而，若能找到一个保距映射 $f: S \to \mathbb{R}^2$, 则上述 "正方形" 的四个顶点的像在 $\mathbb{R}^2$ 中亦为某正方形的四个顶点.

可以猜想 (如果命题是正确的，并且提示所提供的是正确的思路), "球面正方形", 或者，至少在所给球帽上存在一个 "球面正方形", 其对角线与边的

球面长度比不等于 $\mathbb{R}^2$ 中正方形的这个比值，即不等于 $\sqrt{2}$. 这样的话，具有保距性质的映射即不存在.

证法 2　在 $\mathbb{R}^3$ 中任取一张与球帽的交集为一个圆的平面，使得由此平面截下的那部分球帽不足半个球面. 例如，与球帽的帽边平行，且与球帽的交集多于一点的平面 (球帽的顶点 B 到此平面的距离小于此球面的半径) 即可. 在此平面与球帽的交集 —— 圆上取它的两条相互垂直的直径 A_1A_3 和 A_2A_4, 它们的交点记为 O', 球帽所在的球的球心记为 O. 记 $OA_i = R$, $O'A_i = r$, $OO' = h$, $i = 1,2,3,4$. 则点 A_1, A_2, A_3, A_4 在球面上为一个 "球面正方形" 的四个顶点. 事实上，由对称性易知 A_i, A_{i+1} ($i = 0,1,2,3$; $A_4 = A_0$) 之间的球面距离 $\rho(A_i, A_{i+1})$ 皆相等，并且 "对角线" 长度相等：$\rho(A_1, A_3) = \rho(A_2, A_4)$.

设存在一个保距映射 $f: S \to \mathbb{R}^2$, 记 $A_i' = f(A_i)$, $i = 1,2,3,4$, 并记 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euclid 距离为 d, 则

$$d(A_i', A_{i+1}') = \rho(A_i, A_{i+1}), \quad i = 0,1,2,3;$$

$$d(A_1', A_3') = d(A_2', A_4') = \rho(A_1, A_3).$$

因而 A_1', A_2', A_3', A_4' 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个正方形的四个顶点.

记 $\theta = \angle BOA_3$, $2\tau = \angle A_2OA_3$, $a = h/R$, 可以认为 $a \in (0,1)$. 则 $\cos\theta = h/R$, 所以 $\theta = \arccos(h/R)$, 因此

$$\rho(A_1, A_3) = 2R\theta = 2R\arccos\frac{h}{R} = 2R\arccos a,$$
$$\rho(A_2, A_3) = 2R\tau.$$

另一方面，由于 $d(A_2, A_3) = \sqrt{2}\,r = \sqrt{2}\sqrt{R^2 - h^2}$, 又有 $d(A_2, A_3) = 2R\sin\tau$, 因此

$$\sin\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - a^2},$$

所以

$$\tau = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - a^2}\right).$$

现证：$\rho(A_1, A_3)/\rho(A_2, A_3) \neq \sqrt{2}$, 或等价地，

$$\rho(A_1, A_3) - \sqrt{2}\,\rho(A_2, A_3) \neq 0.$$

令 $g(a) = \arccos a - \sqrt{2}\arcsin(\sqrt{2}\sqrt{1 - a^2}/2)$, $0 < a < 1$.

上述论断等价于 $g(a) \neq 0$, $\forall a \in (0,1)$.

显然， g 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $g(1)=0$. 又

$$\begin{aligned}
g'(a) &= -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-a^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{1+a^2}}-1\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,a-\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,a-\sqrt{2a}}{\sqrt{1+a^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+a^2}}<0, \quad \forall a\in(0,1),
\end{aligned}$$

因此 $g(a)>0, \forall a\in(0,1)$.

所以 $d(A_1', A_3')/d(A_2', A_3')>\sqrt{2}$, 即 A_1', A_2', A_3', A_4' 作为四个顶点不构成正方形. 此与前述推理矛盾.

因此不存在从 S 到 $\mathbb{R}^2$ 的保距映射.

第四届全国大学生数学夏令营
试题解答

4.1 设 $(-\infty,\infty)$ 上二次可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$, 且 $|f''(x)|\le C|f(x)f'(x)|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 其中 C 为正常数. 试证: $f(x)\equiv 0$.

证法 1 设若对 $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x_0)=f'(x_0)=0$. 由 $f'(x)$ 之连续性, 可知存在区间 $(-\varepsilon+x_0,\varepsilon+x_0)$, 其中 $\varepsilon<1$, 使得

$$|f(x)|<1,\ |f'(x)|<\frac{1}{C},\quad \forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon).$$

设 $|x-x_0|<\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x-x_0)^2\right|\\ &= \frac{1}{2}|f''(\xi_1)||x-x_0|^2<\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|\le\frac{1}{2}C|f(\xi_1)f'(\xi_1)|,\end{aligned}$$

其中 $x_0\le\xi_1\le x$, 于是 $|\xi_1-x_0|\le|x-x_0|<\varepsilon<1$. 因此

$$|f(x)|<\frac{1}{2}C|f(\xi_1)|\frac{1}{C}=\frac{1}{2}|f(\xi_1)|.$$

对 $f(\xi_1)$ 同法讨论, 便知存在 ξ_2, $x_0\le\xi_2\le\xi_1$, 且

$$|f(\xi_1)|<\frac{1}{2}|f(\xi_2)|,\quad |f(x)|<\frac{1}{2^2}|f(\xi_2)|.$$

因此在区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 中存在序列 $\{\xi_k\}$, 使得

$$|f(x)|<\frac{1}{2^k}|f(\xi_k)|<\frac{1}{2^k}.$$

令 k 趋于无穷, 便证明了 $f(x)=0,\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

因此使得 $f(x)=0,f'(x)=0$ 的那些 x 构成 $\mathbb{R}$ 中一开集. 我们来证它等于 $\mathbb{R}$, 即 $f(x)\equiv 0$. 设若不然, 则集合

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid (f(x),f'(x))\ne 0\}$$

为 $\mathbb{R}$ 中闭子集. 于是集合

$$S_+=\{x\ge 0\mid (f(x),f'(x))\ne 0\}$$

之下确界 $x_1(>0)$ 仍在 S 中 (若 $S_+\ne\emptyset$), 即 $(f(x_1),f'(x_1))\ne 0$ 成立. 可是当 $0\le x<x_1$ 时有 $f(x)=0$, $f'(x)=0$. 而 f 及 f' 都是连续函数, 因此 $f(x_1)=0$, $f'(x_1)=0$. 这与 "x_1 为 S_+ 的下确界" 矛盾. 同理考虑 $\{x\le 0\mid (f(x),f'(x))\ne 0\}$ 之上确界, 仍可推出矛盾. 至此证明了断言.

分析 1　众所周知，一个函数 F 与其 Riemann 可积的导函数 F' 之间有关系 (Newton-Leibniz 公式)

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

因而，$|F(x)|$ 可用 $|F'|$ 的界以及 $|F(a)|$ 来估计．特别，当 $F(a) = 0$ 时，有

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left|\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |F'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^x M_1\,\mathrm{d}t = M_1(x-a), \end{aligned}$$

其中 $M_1 = \sup|F'|$, $x > a$.

因此，如果本题中 f'' 为 Riemann 可积 (例如，$f \in C^2(\mathbb{R})$), 则 $f'(x)$, 继而 $f(x)$, 都可用 $M_2 = \sup\limits_{[0,x]}|f''|$ (先不妨设 $x > 0$) 来估计．而题中条件又为 $|f''(x)| \le C|f(x)f'(x)|, \forall x$, 即为上述估计之反面．这两者 (以及 $f(0) = f'(0) = 0$) 结合在一起就迫使 f 不得不恒为 0. 证明的框架 (还需严格化) 如下：

设 f 在 $[0,+\infty)$ 中不恒为 0, 则可设存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $M_2 = \sup\limits_{[0,x_0]}|f''(x)| \in (0,1)$. 因而对于 $x \in (0, x_0)$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left|\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x |f''(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M_2\,\mathrm{d}t = M_2 x, \\ |f(x)| &= \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M_2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}M_2 x^2. \end{aligned}$$

不妨设 $x_0 \in (0,1)$ 充分小，使 $Cx_0^3 < 1$. 取 $x_1 \in (0, x_0]$, 使 $|f''(x_1)| \ge M_2/2$. 则有

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2} &\le |f''(x_1)| \le C|f(x_1)\cdot f'(x_1)| \\ &\le C\cdot M_2 x_1 \cdot \frac{1}{2}M_2 x_1^2 = \frac{1}{2}M_2^2\cdot Cx_1^3 \\ &\le \frac{1}{2}M_2^2\cdot Cx_0^3 < \frac{1}{2}M_2^2 < \frac{1}{2}M_2, \end{aligned}$$

此式不可能成立．所以 $f(x) = 0, \forall x \ge 0$.

对于 $x_1 < 0$, 可令 $F(x) = f(-x), \forall x$, 则可化为对 $F(x)$ 讨论 $x_1 > 0$ 的情形，从而得到

$$f(x) = F(-x) = 0, \quad \forall x \le 0.$$

因而在 $\mathbb{R}$ 上 $f \equiv 0$.

不幸的是，题目的条件中并未给出 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 或 f'' 为 Riemann 可积函数这样的条件.

然而，幸运的是，由 Lebesgue 积分理论知，若 F' 在 $[a,b]$ 中处处存在且有界，则 F' 为 Lebesgue 可积，且 Newton-Leibniz 公式仍成立：

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a,b],$$

其中的积分为 Lebesgue 积分.

对于我们的题目，由于不等式

$$|f''(x)| \le C|f(x)f'(x)|, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

因此在任一有界区间中 f'' 有界 (由于 f, f' 连续), 所以 f'' 是 Lebesgue 可积的，且

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此 $|f'|$ 仍可用 $|f''|$ 的界来估计. 这样，上面的证明框架仍可用，只是需将其中的 Riemann 积分换成 Lebesgue 积分即可.

证法 2　1. 不妨设 $C = 1$. 事实上，令

$$F(x) = Cf(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

则

$$F(0) = Cf(0) = 0, \quad F'(0) = Cf'(0) = 0, \quad f(x) = \frac{1}{C}F(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{C}F'(x), \quad f''(x) = \frac{1}{C}F''(x), \quad f(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow F(x) \equiv 0,$$

且对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{C}F''(x)\right| &= |f''(x)| \le C|f(x)f'(x)| \\ &= C\left|\frac{1}{C}F(x)\cdot\frac{1}{C}F'(x)\right| = \frac{1}{C}|F(x)F'(x)|,\end{aligned}$$

即 $|F''(x)| \le |F(x)F'(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. 设在 $[0,+\infty)$ 中 $f(x) \not\equiv 0$. 则不妨设对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[0,\varepsilon]$ 中 $f(x) \not\equiv 0$. 否则，令

$$x_0 = \max\{\, \delta > 0 \mid f(x) = 0, \forall x \in [0,\delta] \,\},$$

则 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, 且对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[x_0, x_0+\varepsilon]$ 中 $f(x) \not\equiv 0$. 把 x_0 视作原点即可.

此时，对 $\forall\varepsilon>0$, 在 $[0,\varepsilon]$ 中 $f'(x)\neq 0, f''(x)\neq 0$. 否则，例如设 $f''(x)=0, \forall x\in[0,\delta]$, $\delta>0$ 为某一正数. 则 $f'(x)=\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t=0$, $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=0, \forall x\in[0,\delta]$. 这与 f 的假设矛盾.

3. 因为 $f(0)=f'(0)=0$, 且 f 在 $\mathbb{R}$ 上二次可微，所以 $f,f'\in C^0(\mathbb{R})$, 因此存在 $x_1\in(0,1)$, 使得

$$\max_{[0,x_1]}|f(x)|=M_0\in(0,1),\quad \max_{[0,x_1]}|f'(x)|=M_1\in(0,1),$$

因而

$$|f''(x)|\leq|f(x)f'(x)|\leq M_0M_1,\quad \forall x\in[0,x_1],$$

即

$$M_2=\sup_{[0,x_1]}|f''(x)|\leq M_0M_1<1,$$

且由 2 知 $M_2>0$.

4. 由 Lebesgue 积分理论知，由于 $f''(x)=(f'(x))'$ 在 $[0,x_1]$ 中处处存在，且在 $[0,x_1]$ 中有界，因此 $f''(x)$ 在 $[0,x_1]$ 上 Lebesgue 可积，且

$$f'(x)=f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in(0,x_1],$$

其中积分为 Lebesgue 积分. 所以对 $\forall x\in(0,x_1]$, 有

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\left|\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^x|f''(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leq\int_0^x M_2\,\mathrm{d}t=M_2x<M_2.\end{aligned}$$

又因为 $f'\in C^0(\mathbb{R})$, 所以 f' 在任一有限区间中 Riemann 可积 (当然亦为 Lebesgue 可积), 且

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in(0,x_1].$$

因此

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^x|f'(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leq\int_0^x M_2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}M_2x^2<\frac{1}{2},\quad \forall x\in(0,x_1].\end{aligned}$$

5. 取 $x_2 \in (0, x_1]$, 使 $|f''(x_2)| \geq \frac{1}{2}M_2$. 则

$$\frac{1}{2}M_2 \leq |f''(x_2)| \leq |f(x_2)f'(x_2)| < \frac{1}{2}M_2,$$

此式不可能成立.

因而 $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

6. 令 $F(x) = f(-x), x \in \mathbb{R}$, 则可用上述证明 "$f(x) = 0, \forall x \geq 0$" 的方法证明 $F(x) = 0, \forall x \geq 0$, 即 $f(x) = 0, \forall x \leq 0$.

因而在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x) \equiv 0$.

分析 2 我们不妨先从一个简单的 "命题" 着手, 看看能否从其条件得到其结论. 如不能, 为什么不能? 本题的条件比简单命题的条件强在何处? 如能, 我们从中能得到什么启发? 何以能用到本题中?

命题: 设 $(-\infty, +\infty)$ 上一次可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, 且 $|f'(x)| \leq c|f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$, 其中 c 为正常数. 试证: $f(x) \equiv 0$.

函数与其导函数之间的联系途径有二:

一是 Newton-Leibniz 公式

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

在命题的条件下要用到 Lebesgue 积分 (参阅本题 "分析 1"), 然后在反证法假设 $f \neq 0$ 下得到矛盾 (需严格化):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_1 &\leq |f'(x_2)| \leq c|f(x_2)| \\ &= c\left|\int_0^{x_2} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{(此处是 Lebesgue 积分)} \\ &\leq c\int_0^{x_2} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq c\int_0^{x_2} M_1\,\mathrm{d}t \\ &= cM_1x_2 < \frac{1}{2}M_1,\end{aligned}$$

其中 $0 < x_2 \leq x_1$, $cx_1 < 1/2$, f, f' 在 $[0, x_1]$ 上不恒为 0, $M_1 = \sup\limits_{[0,x_1]} |f'(x)|$. 由此推广可得证法 2. (证法 2 中对相应的 x_1 的定义作了修改, 要求 $x_1 < 1$, 原因是证法 1 对常数 C 作了规范化处理: 令 $C = 1$.)

联系 F 与 F' 的另一途径是 Lagrange 中值定理:

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(\xi),$$

其中 ξ 为由函数 F, 点 a 与 x 决定的 a 与 x 之间的某值.

在命题的条件及反证法假设 $f\neq 0$ 下，可得到矛盾 (需严格化):

$$\begin{aligned} cM_0 &\geq c|f(\xi)| \geq |f'(\xi)| \\ &= \left|\frac{f(x_2)-f(0)}{x_2-0}\right| = \left|\frac{f(x_2)}{x_2}\right| > cM_0, \end{aligned}$$

其中 $0<|x_2|<x_1$, $1/x_1>c$, $|f(x_2)|=\max\limits_{[-x_1,x_1]}|f(x)|=M_0$, ξ 在为 0 与 x_2 之间的某值. 由此可知命题是成立的.

可以想见，此命题的证明方法可用于证明本题. 在反证法假设的前提下推得矛盾的框架 (证明时必须补充其细节) 可用下述一列不等式表示:

$$\begin{aligned} CM_1 &\geq C|f'(\xi)| \\ &\geq C|f(\xi)f'(\xi)| \qquad (\text{若}|f(\xi)|\leq 1) \\ &\geq |f''(\xi)| = \left|\frac{f'(x_2)-f'(0)}{x_2-0}\right| \\ &= \left|\frac{f'(x_2)}{x_2}\right| > C|f'(x_2)| = CM_1, \end{aligned}$$

其中 $0<|x_2|<x_1$, $1/x_1>C$, $|f'(x_2)|=\max\limits_{[-x_1,x_1]}|f'(x)|=M_1$, ξ 为在 0 与 x_2 之间的某值.

证法 3 1. 设 $f(x)\neq 0$, $x\geq 0$. 则不妨设对 $\forall\varepsilon>0$, 在 $[0,\varepsilon]$ 中 $f(x)\neq 0$. (见证法 2, 2.) 因而，在 $[0,\varepsilon]$ 中 $f'(x)\neq 0$.

2. 取 $x_1>0$, 使得 $1/x_1>C$, 且由于 $f\in C^0(\mathbb{R})$, 所以可设 $\max\limits_{[0,x_1]}|f(x)|=M_0\in(0,1)$. 记 $M_1=\max\limits_{[0,x_1]}|f'(x)|$, 则 $M_1>0$.

3. 取 $x_2\in[0,x_1]$, 使 $|f'(x_2)|=M_1$. 由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(0,x_2)$, 使得

$$|f''(\xi)| = \left|\frac{f'(x_2)-f'(0)}{x_2-0}\right| = \left|\frac{f'(x_2)}{x_2}\right|.$$

则有

$$\begin{aligned} CM_1 &\geq C|f'(\xi)| > C|f(\xi)f'(\xi)| \\ &\geq |f''(\xi)| = \left|\frac{f'(x_2)}{x_2}\right| > CM_1, \end{aligned}$$

此式不可能成立.

因而 $f(x)=0$, $\forall x\geq 0$.

4. 与证法 2, 6 同，可证 $f(x)=0$, $\forall x\leq 0$. 所以 $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

说明 由分析 1, 2 及证法 2, 3 可知，本题可推广为：

设 $n \in \mathbb{N}$, 并设 $\mathbb{R}$ 上 n 次可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 且存在正常数 c 与 $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, 使得 $|f^{(n)}(x)| \le c|f^{(j)}(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 试证： $f(x) \equiv 0$. ($f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.)

证法 1 (概要) 1. 设在 $[0, +\infty)$ 中 $f(x) \not\equiv 0$. 则可设对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[0, \varepsilon]$ 中 $f^{(i)}(x) \not\equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. (见 4.1, 证法 2, 2.)

2. 取 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $cx_1 < 1/2$.

令 $M_n = \sup\limits_{[0,x_1]} |f^{(n)}(x)|$, 取 $x_2 \in [0, x_1]$, 使 $|f^{(n)}(x_2)| \ge M_n/2$.

3. $f^{(i)}(x)\,(i = j+1, j+2, \ldots, n)$ 在 $[0, x_1]$ 上 Lebesgue 可积，且 Newton-Leibniz 公式成立：

$$f^{(i-1)}(x) = f^{(i-1)}(x) - f^{(i-1)}(0) = \int_0^x f^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $i = j+1, j+2, \ldots, n$, $x \in (0, x_1]$. 由此可得

$$|f^{(i-1)}(x)| \le \frac{1}{(n-i+1)!}\, M_n x^{n-i+1} \le M_n x,$$
$$i = j+1, j+2, \ldots, n,\ x \in (0, x_1].$$

4. 因此

$$\frac{1}{2} M_n \le |f^{(n)}(x_2)| \le c|f^{(j)}(x_2)|$$
$$\le cM_n x_2 \le cM_n x_1 < \frac{1}{2} M_n,$$

得到矛盾. 因此 $f(x) = 0$, $\forall x \ge 0$.

5. 类似可证 $f(x) = 0$, $\forall x \le 0$. 所以 $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证法 2 (概要) 1. 同证法 1,1.

2. 取 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $1/x_1 > c$. 令 $M_j = \max\limits_{[0,x_1]} |f^{(j)}(x)|$, 则 $M_j > 0$. 令 $x_2 \in [0, x_1]$, 使 $|f^{(j)}(x_2)| = M_j$.

3. 由 Lagrange 中值定理依次定义 $x_3, x_4, \ldots, x_{n-j+2}$：

$$|f^{(i+1)}(x_{i-j+3})| = \left|\frac{f^{(i)}(x_{i-j+2}) - f^{(i)}(0)}{x_{i-j+2} - 0}\right| = \left|\frac{f^{(i)}(x_{i-j+2})}{x_{i-j+2}}\right|,$$
$$i = j, j+1, \ldots, n-1,$$

则

$$0 < x_{n-j+2} < x_{n-j+1} < \cdots < x_3 < x_2 \le x_1 < 1.$$

4. 因而

$$\begin{aligned}cM_j &\geq c|f^{(j)}(x_{n-j+2})| \geq |f^{(n)}(x_{n-j+2})|\\&= \left|\frac{f^{(n-1)}(x_{n-j+1})}{x_{n-j+1}}\right| = \left|\frac{f^{(n-2)}(x_{n-j})}{x_{n-j+1}\cdot x_{n-j}}\right|\\&= \cdots = \left|\frac{f^{(j)}(x_2)}{x_{n-j+1}\cdot x_{n-j}\cdots x_2}\right|\\&\geq \frac{|f^{(j)}(x_2)|}{x_1} > cM_j,\end{aligned}$$

此式不可能成立. 所以 $f(x)=0, \forall x \geq 0$.

5. 类似可证 $f(x)=0, \forall x \leq 0$. 所以 $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

4.2 设 A, B 为数域 P 上的两个 n 阶方阵, 满足 $AB=BA$, 且存在正整数 N 使得 $A^N=0$. 试证: $\det(A+B)=\det B$.

证法 1 用扰动法. 考虑参数 ε 及 n 阶单位方阵 I. 作 n 阶方阵 $\varepsilon I+B$. 注意到 B 的特征多项式 $\det(\lambda I-B)$ 至多有 n 个不同根, 所以存在正数序列 $\{\varepsilon_i\}$ 使得 $\varepsilon_i \to 0$; 且 $\det(\varepsilon_i I+B)\neq 0$, $i=1,2,\ldots$. 令

$$\lim_{i\to\infty}\det(\varepsilon_i I+B)=\det B.$$

由于

$$\begin{aligned}\det(A+B+\varepsilon_i I) &= \det(\varepsilon_i I+B)(I+(\varepsilon_i I+B)^{-1}A)\\&= \det(\varepsilon_i I+B)\det(I+(\varepsilon_i I+B)^{-1}A),\end{aligned}$$

如果我们能证明

$$\det(I+(\varepsilon_i I+B)^{-1}A)=1, \qquad i=1,2,\ldots,$$

则有

$$\det(A+B+\varepsilon_i I)=\det(B+\varepsilon_i I).$$

令 $i\to\infty$, 便证明了

$$\det(A+B)=\det B.$$

记

$$A_i=(\varepsilon_i I+B)^{-1}A.$$

注意到 $AB = BA$, 所以

$$(\varepsilon_i I + B)^{-1} A = A(\varepsilon_i I + B)^{-1}.$$

因此

$$[(\varepsilon_i I + B)^{-1} A]^N = (\varepsilon_i I + B)^{-N} A^N = 0.$$

所以 $A_i^N = 0$. 因此将数域 P 扩充到复数域, 则 A_i 有 Jordan 标准形

$$B_i = \operatorname{diag}(J_{i1}, \ldots, J_{is_i}),$$

其中

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

而且存在 n 阶非异方阵 P_i, 使

$$A_i = P_i B_i P_i^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \det(I + A_i) &= \det P(I + B_i)P_i^{-1} = \det(I + B_i) \\ &= \det \operatorname{diag}(I_{i1} + J_{i1}, \ldots, I_{is_i} + J_{is_i}), \end{aligned}$$

其中 I_* 为单位方阵. 显然

$$\det(I_{ij} + J_{ij}) = 1,$$

于是

$$\det(I + A_i) = \prod_{j=1}^{s_i} \det(I_{ij} + J_{ij}) = 1.$$

至此证明了断言. 证毕.

证法 2 (不用扰动法) 将数域 P 扩充到复数域是自然的. 我们先来证明下一事实: 当方阵 A 和 B 满足 $AB = BA$ 时, 它们在复数域上可同时相似于上三角方阵, 即存在 n 阶非异复方阵 P, 使得

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

而

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det P(A+B)P^{-1} = \det(PAP^{-1}+PBP^{-1}) \\ &= \det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}+b_{nn}\end{pmatrix}' = \prod_{j=1}^{n}(a_{jj}+b_{jj}).\end{aligned}$$

可是 $a_{11},\ldots,a_{nn}$ 为 n 阶方阵 A 之本征值．今已知 $A^N=0$, 所以 $a_{ii}=0$, $1\le i\le n$. 这证明了

$$\det(A+B)=\prod_{j=1}^{n}b_{jj}=\det PBP^{-1}=\det B.$$

因此断言成立.

为了证明 A 和 B 可以同时化为对角方阵 (这时不要求 A 为幂零方阵), 我们对 n 作归纳法.

给定 A 的本征值 a_n. 于是属于 a_n 之本征向量全体加上零向量构成一个 n 维向量空间的子空间

$$L_n=\{x\in\mathbb{C}^n \mid Ax=a_nx\}\neq\{0\}.$$

任取 $y\in L_n$, 我们来证 $By\in L_n$. 事实上,

$$A(By)=(AB)y=(BA)y=B(Ay)=B(a_ny)=a_nBy,$$

所以 $By\in L_n$. 因此子空间 L_n 在 B 下不变，将 B 限制在 L_n 上，仍有本征向量 α_n, 属于本征值 b_n. 即有

$$A\alpha_n=a_n\alpha_n,\qquad B\alpha_n=b_n\alpha_n.$$

记 α_n 生成之一维向量子空间为 L_0, 则可考虑 $n-1$ 维向量空间 $\mathbb{C}^n/L_0$. 由于 $A(L_0)\subset L_0$, $B(L_0)\subset L_0$, 所以 A,B 诱导了 $\mathbb{C}^n/L_0$ 上的线性变换. 当然在 $\mathbb{C}^n$ 上 $AB=BA$, 所以在 $\mathbb{C}^n/L_0$ 上也可交换，由归纳法假设在线性空间 $\mathbb{C}^n/L_0$ 上存在基，使 A 和 B 在 $\mathbb{C}^n/L_0$ 上诱导之线性变换都可以表为上三角方阵，即有 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, 使得

$$A\alpha_i=a_{ii}\alpha_i+a_{i+1,i}\alpha_{i+1}+\cdots+a_{n-1,i}\alpha_{n-1}+a_{ni}\alpha_n,$$

$$B\alpha_i=b_{ii}\alpha_i+b_{i+1,i}\alpha_{i+1}+\cdots+b_{n-1,i}\alpha_{n-1}+b_{ni}\alpha_n,$$

$1 \le i \le n-1$. 另有

$$A\alpha_n = a_n\alpha_n, \qquad B\alpha_n = b_n\alpha_n.$$

所以可改记为

$$A\alpha_i = \sum_{j=i}^{n} a_{ji}\alpha_j, \qquad 1 \le i \le n,$$

$$B\alpha_i = \sum_{j=i}^{n} b_{ji}\alpha_j, \qquad 1 \le i \le n,$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 之基. 记

$$P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

为 n 阶方阵. 由于其列向量线性无关, 所以 P 非异. 而

$$AP = P\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}', \qquad BP = P\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}',$$

所以 A 和 B 同时相似于上三角方阵. 证毕.

4.3 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 在 $|z| = 1$ 上有 $|f(z)| \le 1$. 设 $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个 m 重零点, z_0 满足

$$|z_0| \le \frac{m-1}{m},$$

其中 m 是正整数, $m \ge 2$. 试证:

$$|f(-z_0)| < e^{-\frac{1}{2m}},$$

其中 e 为自然对数的底.

证明 考虑单位圆盘 D 到自身上的一一保角变换

$$w = \frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0},$$

于是在 D 上有全纯函数

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}\right).$$

由题设, 于是有 $|g(z)| \le 1$ 在 $|z| = 1$ 上成立. 今 z_0 为 $f(z)$ 之 m 重零点, 而 $g(0) = f(z_0)$, 所以原点为 $g(z)$ 的 m 重零点. 在原点附近将 $g(z)$ 展成幂级

数，便知道函数

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{g(z)}{z^m},\ z\neq 0, & |z|\leq 1,\\ \dfrac{1}{m!}\dfrac{d^m g(z)}{dz^m}\bigg|_{z=0}, & z=0\end{cases}$$

在单位圆盘 D 上全纯，且在单位圆周 $|z|=1$ 上有

$$|h(z)|=|g(z)|\leq 1.$$

当 $h(z)$ 为常数时，有 $g(z)=cz^m$，其中 c 为复数，且 $|c|\leq 1$；当 $h(z)$ 不是常数时，由最大模原理可知在单位圆盘 D 上

$$|h(z)|<1,$$

即

$$|g(z)|<|z|^m.$$

总之，有

$$|g(z)|\leq |z|^m,\quad \forall z\in D.$$

即

$$\left|f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right)\right|\leq |z|^m,\quad \forall z\in D.$$

令

$$Z=\frac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z},$$

有

$$Z+Zz\overline{z}_0=z+z_0,$$

即有

$$(1-\overline{z}_0 Z)z=Z-z_0.$$

今 $|z_0|<1$, $|Z|<1$, 所以

$$z=\frac{Z-z_0}{1-\overline{z}_0 Z}.$$

这证明了

$$|f(z)|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|^m,\quad \forall z\in D.$$

特别

$$|f(-z_0)|\leq\left|\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2}\right|^m=\frac{2^m|z_0|^m}{(1+|z_0|^2)^m}.$$

注意到题设

$$|z_0| \leq \frac{m-1}{m},$$

记 $|z_0| = x$, 有 $0 \leq x \leq (m-1)/m$, 而对 $k(x) = 2x/(1+x^2)$ 有 $k'(x) > 0$, $0 \leq x \leq (m-1)/m$, 所以在区间 $[0,(m-1)/m]$ 上, $k(x)$ 单调递增. 因此在此区间上,

$$k(x) \leq \frac{\dfrac{2(m-1)}{m}}{1+\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2} = \frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2} = \frac{2m^2-2m}{2m^2-2m+1},$$

即证明了

$$|f(-z_0)| \leq \left(\frac{2m^2-2m}{2m^2-2m+1}\right)^m = \left(\frac{2m^2-2m+1}{2m(m-1)}\right)^{-m}$$
$$= \left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)^{-m}.$$

为了证 $|f(-z_0)| < e^{-1/(2m)}$, 需要证 (其中对数函数 log 以 e 为底)

$$\log|f(-z_0)| < -\frac{1}{2m}.$$

今已知

$$\log|f(-z_0)| \leq -m\log\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right).$$

问题化为要证

$$\log\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right) > \frac{1}{2m^2}.$$

事实上, 考虑函数

$$l(x) = \log(1+x) - \frac{m-1}{m}x,$$

有

$$\frac{\mathrm{d}l(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x} - \frac{m-1}{m}.$$

因此当 $0 < x < 1/(m-1)$ 时有 $(m-1)/m < 1/(1+x) < 1$, 所以 $\mathrm{d}l(x)/\mathrm{d}x > 0$, 即在开区间 $(0,1/(m-1))$ 中 $l(x)$ 严格单调递增. 今 $l(0)=0$, 所以由

$$0 < \frac{1}{2m(m-1)} < \frac{1}{m-1}$$

得

$$\log\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right) - \frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{2m(m-1)} > 0,$$

即

$$\log\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)>\frac{1}{2m^2}.$$

证毕.

说明 若设 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点有 $m-1$ 重零点，则本题不成立. 事实上，令 $z_0=(m-1)/m$,

$$f(z)=\left(\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)^{m-1},$$

则

$$f(-z_0)=\left(\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2}\right)^{m-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}|f(-z_0)| &= \left(\frac{\dfrac{2(m-1)}{m}}{1+(\dfrac{m-1}{m})^2}\right)^{m-1}=\left(\frac{2m(m-1)}{m^2+(m-1)^2}\right)^{m-1}\\ &=\left(\frac{2m^2-2m+1}{2m^2-2m}\right)^{-m+1}=\left(1+\frac{1}{2m(m-1)}\right)^{1-m}>e^{-\frac{1}{2m}}.\end{aligned}$$

4.4 在 n 维线性空间 V 中给定两组基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$. 试证：存在 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$，使得对任意 $j=1,2,\ldots,n$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n\}$ 是 V 的基.

证明 固定基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 来讨论. 由于

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\alpha_j,\qquad 1\le i\le n$$

及 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 为基，可知 $n\times n$ 方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

非异. 所以 $\det A\neq 0$. 由行列式定义

$$\det A=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}1\ 2\cdots n\\ i_1 i_2\cdots i_n\end{smallmatrix}\right)}\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中和号指对 $1,2,\ldots,n$ 之一切排列求和，而 $\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n}=\pm1$. 所以一定存在 $1,2,\ldots,n$ 的排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$, 使得

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\neq 0.$$

由

$$a_{ji_j}\neq 0,\qquad 1\leq j\leq n,$$

考虑

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\alpha_1,\\
&\vdots\\
&\alpha_{j-1}=\alpha_{j-1},\\
&\beta_{i_j}=a_{1i_j}\alpha_1+\cdots+a_{ji_j}\alpha_j+\cdots+a_{ni_j}\alpha_n,\\
&\alpha_{j+1}=\alpha_{j+1},\\
&\vdots\\
&\alpha_n=\alpha_n,
\end{aligned}$$

显然 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n$ 线性无关，所以仍为 V 之基，即

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n\}$$

为 V 之基，这里 j 可取 $1,2,\ldots,n$. 证毕.

4.5 求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$, 或证明此极限不存在.

分析 显然，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=+\infty$.

事实上，由 Lagrange 中值定理，有

$$\frac{e^x-e^y}{x-y}=e^\xi,$$

其中 ξ 为介于 x 与 y 之间的某值 (当 $x=y$ 时，由连续性，可认为 $\xi=x$), 而 $x>0$, $y>0$ (可不考虑积分区域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq x\leq t, 0\leq y\leq t\}$ 的边界), 所以 $\xi>0$, 因而 $e^\xi>1$. 所以当 $t\to+\infty$ 时

$$\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geq\int_0^t\int_0^t\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=t^2\to+\infty.$$

这样，$e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big/e^t$ 当 $t\to+\infty$ 时即为 ∞/∞ 型. 因而不妨试用 L'Hospital 法则来求所要求的极限.

由于

$$\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t\left[\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

因此，为清楚起见，不妨记

$$f(y,t)=\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x.$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)&=\lim_{t\to+\infty}\left\{\int_0^t f(y,t)\,\mathrm{d}y\Big/e^t\right\}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(f(t,t)+\int_0^t f_t(y,t)\,\mathrm{d}y\right)\Big/e^t\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t \frac{e^x-e^t}{x-t}\,\mathrm{d}x+\int_0^t \frac{e^t-e^y}{t-y}\,\mathrm{d}y\right)\Big/e^t\\&=\lim_{t\to+\infty}2\int_0^t \frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x\Big/e^t.\end{aligned}$$

至此，所求之极限归结为求极限值 $\lim\limits_{t\to+\infty}2e^{-t}\int_0^t \frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x$. 似乎再接着用 L'Hospital 法则即遇到困难. 但此极限在形式上毕竟比原来的要简单些. 试试直接估计 $\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^t \frac{1-e^{x-t}}{t-x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_t^0 \frac{1-e^{-y}}{y}(-\mathrm{d}y)=\int_0^t \frac{1-e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\\&>\int_1^t \frac{1-e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\qquad\left(y>0\text{时},\frac{1-e^{-y}}{y}>0\right)\\&>\int_1^t \frac{1-e^{-1}}{y}\,\mathrm{d}y>\frac{1}{2}\int_1^t\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln t,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}2e^{-t}\int_0^t \frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x=+\infty$, 最后得到

$$\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\int_0^t\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)=+\infty.$$

解 (i) 令 $f(y,t)=\int_0^t \frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x$. 作为二元函数，$f(y,t)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连

续函数 (请读者自行验证), 且

$$\frac{\partial f(y,t)}{\partial t}=\frac{e^t-e^y}{t-y}$$

也是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 (当 $y=t$ 时可定义其为 e^t). 因而, 由含参变量的积分理论可知

$$\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t f(y,t)\,\mathrm{d}y$$

对 t 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 并且

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(y,t)\,\mathrm{d}y\\&=f(t,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}f(y,t)\,\mathrm{d}y=\int_0^t\frac{e^x-e^t}{x-t}\,\mathrm{d}x+\int_0^t\frac{e^t-e^y}{t-y}\,\mathrm{d}y\\&=2\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(ii) $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=+\infty.$ (见 "分析" 部分).

(iii) 由 L'Hospital 法则及 (i) 知 (事实上, 只需 "h,g 在 $(0,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$; h',g' 在 $(0,+\infty)$ 上存在, 在 $(0,+\infty)$ 上 $g'\neq0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)/g'(x)$ 存在 (可为 $+\infty$ 或 $-\infty$)", 即可应用 L'Hospital 法则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h'(x)}{g'(x)},$$

而不需 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\infty$, 即不需 (ii)):

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{t\to+\infty}2e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

(见 "分析" 部分)

所以

$$\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)=+\infty.$$

4.6 设 S 为一非空集合, $P(S)$ 表示 S 的幂集合, 即 S 的一切子集 (包括空集和 S 本身) 是 $P(S)$ 的全部元素. 令 f 是 $P(S)$ 到其自身的一个映射, 满足 $f(X)\supset f(Y)$, 若 $X\supset Y$. 试证: 存在 $A\in P(S)$, 使得 $f(A)=A$.

分析 显然, $f(\emptyset)\supset\emptyset$. 因此, 如果令

$$A_0=\emptyset,\quad A_n=f(A_{n-1}),\qquad n=1,2,3,\dots,$$

则由映射 f 的"单调性"(即 $X\supset Y\Longrightarrow f(X)\supset f(Y)$) 可知 $A_n\supset A_{n-1}$, $n=1,2,3,\ldots$, 即 $\emptyset=A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$. 因此，如果 S 是有限集，则不难得到：或者 $f(\emptyset)=\emptyset$; 或者有 $j\in\mathbb{N}$, $A_j\subset S$ 为 S 的真子集，使得 $f(A_j)=A_j$; 或者有 $n\in\mathbb{N}$, 使 $A_n=S$, 则 $f(A_n)=A_n$.

但是， S 是一般的集合，不妨认为其为无限集. 这样，上面的证明就通不过了.

然而, 我们仍从中受到了启发: "$f(\emptyset)\supset\emptyset$" 告诉我们, 满足条件 $f(X)\supset X$ 的集合 $X\subset S$ 是存在的，而不动集合 A (亦即 A 满足 $f(A)=A$) 亦满足 $f(A)\supset A$. 因此 A 应在非空集合 $\mathcal{A}=\{X\subset S \mid f(X)\supset X\}$ 中. 可以想象，如果集合 $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X\in\mathcal{A}$, 则 $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X$ 是 $\mathcal{A}$ 中"最大"的元素，它应是映射 f 的一个不动集合. 容易证明 $\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X\in\mathcal{A}$.

有了目标，就可以逐步去实现了.

证明　显然， $f(\emptyset)\supset\emptyset$. 因此，集合

$$\mathcal{A}=\{X\subset S\mid f(X)\supset X\}$$

非空. 令 $A=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X$. 我们断言， $A=f(A)$.

事实上，对 $\forall X\in\mathcal{A}$, 有 $X\subset A$. 由 $\mathcal{A}$ 的定义及 f 的单调性，有

$$X\subset f(X)\subset f(A),$$

因此

$$A=\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X\subset f(A),$$

即 $A\in\mathcal{A}$.

另一方面，由 $A\in\mathcal{A}$ 及 f 的单调性和 $f(A)\subset f(f(A))$, 即 $f(A)\in\mathcal{A}$. 因此 $A=\cup_{x\in\mathcal{A}}X\supset f(A)$.

综上所述即得 $A=f(A)$.

说明　由对偶性容易知道，如果令

$$\mathcal{B}=\{Y\subset S \mid Y\supset f(Y)\},$$

由于显然有 $S\supset f(S)$, 因此 $\mathcal{B}\neq\emptyset$. 再令 $A=\bigcap_{Y\in\mathcal{B}}Y$, 则 $A=f(A)$.

请读者自行证明之.

第五届全国大学生数学夏令营
试题解答

第一试

5.1.1 xOy 平面上有两个圆

$$C_1: (x-1)^2+(y-1)^2=1, \quad C_2: (x+2)^2+(y+2)^2=4.$$

求作一个在全平面连续，取值于 0 与 1 之间的函数 $f(x,y)$，使得 $f(x,y)$ 在圆 C_1 的内部取值 1，在圆 C_2 的内部取值零.

分析 我们知道，对于距离空间 (X,ρ) 中的两个集合 B_1,B_2，如果它们的闭包不相交：$\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=\emptyset$，则函数

$$f(P)=\frac{\rho(P,B_2)}{\rho(P,B_1)+\rho(P,B_2)}$$

是 $P\in X$ 的连续函数，并且 $0\le f(P)\le 1, \forall P\in X$; $f|_{B_1}=1$, $f|_{B_2}=0$. 我们所要构造的函数显然可以作为它的特殊情形： $X=\mathbb{R}^2$, ρ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的 Euclid 距离， $B_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-1)^2<1\}$, $B_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2+(y+2)^2<4\}$.

此外，根据所给的两个圆 C_1 和 C_2 的几何位置，我们还可用一元函数作为媒介来构造所需要的函数. 由于 C_1 的内部在直线 $x+y=2-\sqrt{2}$ 的上方，C_2 的内部在直线 $x+y=-4+2\sqrt{2}$ 的下方，且这两条直线相互平行. 因此不妨作一连续函数 $f(x,y)$，它在 $x+y=2-\sqrt{2}$ 的上方等于 1，在 $x+y=-4+2\sqrt{2}$ 的下方等于 0，在这两条直线之间取值于 0,1 之间. 这样的函数即能满足我们的要求. (注意，题目中并未要求函数 f 只在 C_1 内部为 1，及只在 C_2 内部为 0.) 容易作出一元连续函数 $g(u)$，满足 $g(u)=1$，如 $u\ge 2-\sqrt{2}$; $g(u)=0$，如 $u\le -4+2\sqrt{2}$; $0<g(u)<1$，如 $-4+2\sqrt{2}<u<2-\sqrt{2}$. 因而 $f(x,y)=g(x+y)$ 即可作为所求.

再者，圆 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ 的内部包含 C_2 的内部，圆 $(x+2)^2+(y+2)^2=8$ 的外部包含 C_1 的内部. 作一元函数 $g\in C^0([0,+\infty))$，使得 $g(r)=0$，如 $0\le r\le 2$; $g(r)=1$，如 $2\sqrt{2}\le r<+\infty$; $0<g(r)<1$，如 $2<r<2\sqrt{2}$. 则 $f(x,y)=g(\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2})$ 亦可作为所求.

作法 1 设点 $P\in\mathbb{R}^2$ 的坐标为 (x,y)，d 为 $\mathbb{R}^2$ 中的 Euclid 距离，$d(P,B)$

表示点 P 到集合 $B\subset\mathbb{R}^2$ 的距离: $d(P,B)=\inf\limits_{Q\in B}d(P,Q)$, 则 $d(P,B)$ 是 P 的连续函数. 令

$$f(x,y)=f(P)=\frac{d(P,B_2)}{d(P,B_1)+d(P,B_2)},$$

其中 B_j 是圆 C_j 的内部, $j=1,2$. 显然, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$; $0\le f(P)\le 1, \forall P\in\mathbb{R}^2$; $f|_{B_1}=1$, $f|_{B_2}=0$.

作法 2 令

$$g(u)=\begin{cases}0, & u\le -4+2\sqrt{2},\\ \dfrac{u-(-4+2\sqrt{2})}{6-3\sqrt{2}}, & -4+2\sqrt{2}\le u\le 2-\sqrt{2},\\ 1, & 2-\sqrt{2}\le u.\end{cases}$$

则 $g\in C^0(\mathbb{R})$, $0\le g(u)\le 1$, $\forall u\in\mathbb{R}$. 令 $f(x,y)=g(x+y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 容易验证 f 满足所有要求.

作法 3 令

$$g(r)=\begin{cases}0, & 0\le r\le 2,\\ \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}(r-2), & 2\le r\le 2\sqrt{2},\\ 1, & 2\sqrt{2}\le r<+\infty.\end{cases}$$

则 $g\in C^0([0,+\infty))$, $0\le g(r)\le 1$, $\forall r\in[0,+\infty)$.

令 $f(x,y)=g(\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2})$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 则 $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$ 满足所有要求.

说明 如果在作法 2 和作法 3 中构造的 $g\in C^\infty$, 则由 g 导出的二元函数 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. 例如, 令

$$E(r)=\begin{cases}e^{-1/r^2}, & r>0,\\ 0, & r\le 0.\end{cases}$$

熟知 $E\in C^\infty(\mathbb{R})$, 且显然 $0\le E(r)<1$, $\forall r\in\mathbb{R}$.

再令

$$g(r)=\frac{E(r-2)}{E(2\sqrt{2}-r)+E(r-2)},\qquad r\in\mathbb{R},$$

则 $g\in C^\infty(\mathbb{R})$; $0\le g\le 1$; $g(r)=0$, 如 $r\le 2$; $g(r)=1$, 如 $r\ge 2\sqrt{2}$.

因而 $f(x,y)=g(\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2})\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; $0\le f\le 1$; 在 C_1 内部 $f=1$, 在 C_2 内部 $f=0$.

5.1.2 能否求出最小正数 k, 使得对任意 $x>0, y>0, z>0$, 下列不等式成立：

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\le k\sqrt{x+y+z}.$$

分析 这道题未给出答案，需要自己探索. 由于讨论对象是不等式，因此可以通过比较当 x,y,z 趋向于某些极限值时不等式左、右两端趋于 0 或趋于 $+\infty$ 的阶来得到一些信息.

另一个想法是，所讨论的不等式是 3 个变元的，自然想把其简化，从而或者得到满足不等式的 k 必须满足的条件，或者推得没有 $k>0$ 能对所有正数 x,y,z 满足所述的不等式.

解答 1 令

$$P(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}},$$
$$Q(x,y,z)=\sqrt{x+y+z}.$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0_+\\y\to0_+}}P(x,y,1)&=\lim_{\substack{x\to0_+\\y\to0_+}}\left(\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)\\&=\lim_{\substack{x\to0_+\\y\to0_+}}\frac{1}{\sqrt{x+y}}=+\infty,\\\lim_{\substack{x\to0_+\\y\to0_+}}kQ(x,y,1)&=\lim_{\substack{x\to0_+\\y\to0_+}}k\sqrt{x+y+1}=k.\end{aligned}$$

因此，任何正数 k 都不能使题中的不等式对所有正数 x,y,z 都成立.

解答 2 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 的定义如解答 1 中所述. 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x,1,1)}{Q(x,1,1)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{1+x}}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x+2}}=+\infty.\end{aligned}$$

所以结论与解答 1 相同.

5.1.3 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在有理数点上取值为无理数，在无理数点上取值为有理数. 试证： f 不是连续函数.

分析 为了证明这个函数 f 不是连续函数，就要找出连续函数的某种不被 f 所满足的性质.

任何连续函数在闭区间中达到它在此闭区间中的最大值和最小值. f 是否具有这种性质呢？至少能构造一个 f 具有这样的性质：$f(x)=\pi$, 如 x 为有理数；$f(x)=0$, 如 x 为无理数. 显然, 在任何闭区间 I 上，$\max\limits_{I} f=\pi$, $\min\limits_{I} f=0$ 分别在 I 中的任一有理点和任一无理点处被达到.

我们不难从题目中 f 的定义看出， f 不是常值函数，并且其值域并不丰满：它的值域中的元素至多可数个. 因而它必不具有连续函数这样的性质：设 $x_1 \neq x_2$, 使 $f(x_1)<f(x_2)$, 则 f 的值域包含闭区间 $[f(x_1), f(x_2)]$.

证明 以 $R(f)$ 表示函数 f 的值域. 由 f 的定义可知， $R(f)$ 中既含有理数，又含有无理数，所以 f 不是常值函数.

其次， $R(f)$ 至多可数. 事实上，

$$R(f)=\{\, f(r_n) \mid r_n \in \mathbb{Q} \,\} \bigcup \{\, f(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ 为无理数} \,\},$$

其中第 1 项显然至多可数；而由 f 的定义，第 2 项包含于有理数集 $\mathbb{Q}$ 中，因而也至多可数.

因为非常值函数的连续函数的值域必包含闭区间 (这由 Bolzano-Cauchy 的中值定理即得), 闭区间中的点是不可数的，所以题中所给的函数 f 不是连续函数.

说明 虽然所讨论的函数必不是连续函数, 但它却可以是几乎处处连续的. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p};\ p,q\in\mathbb{Z},\ p>0,\ (p,q)=1, \\ \pi, & x=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则容易知道 $f(x)$ 在任意无理点处连续.

5.1.4 在三维欧氏空间中给定 n 个点 $A_1,\dots,A_n$, 给定 n 个实数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 适合 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0$. 试证：对任意点 Q, 在此空间中唯一存在与 Q 无关的点 P, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QP}\,.$$

证法 1 令 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0$. 令

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1,$$

从而题设条件变为

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{QA_i} = \overrightarrow{QP}.$$

为了证明唯一存在与 Q 无关之点 P, 我们用坐标写出各点. 令

$$\begin{aligned} A_i &= (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}), \quad 1 \le i \le n, \\ Q &= (q_1, q_2, q_3), \\ P &= (p_1, p_2, p_3), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA_i} &= (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}) - (q_1, q_2, q_3) \\ &= (a_{1i} - q_1, a_{2i} - q_2, a_{3i} - q_3), \quad 1 \le i \le n, \\ \overrightarrow{QP} &= (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3), \end{aligned}$$

因此条件变为

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_{1i} - q_1, a_{2i} - q_2, a_{3i} - q_3) = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3),$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_{1i} - q_1) = p_1 - q_1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_{2i} - q_2) = p_2 - q_2,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_{3i} - q_3) = p_3 - q_3.$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, 所以上 3 式可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{1i} = p_1, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{2i} = p_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{3i} = p_3.$$

因此求出了点 P 之坐标为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{1i},\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{2i},\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{3i}\right),$$

它与点 Q 之坐标 (q_1,q_2,q_3) 无关，且它由 $\mu_1,\ldots,\mu_n,a_{1i},a_{2i},a_{3i},1\le i\le n$ 唯一确定．这证明了断言．

分析 要求得点 P，就要从它所满足的等式出发来导出 P 应具有的形式．既然题中所要求被满足的等式对 $\forall Q\in\mathbb{R}^3$ 都成立，则可赋 Q 以特殊值，例如令 $Q=O$，O 为 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标原点，即可得到 $\overrightarrow{OP}$ 的表达式，因而就确定了点 P．这也说明了这样的点是唯一的．

显然，这样确定的 P 必然适合题中的等式．(否则，命题就是错的！) 这只需将 P 的表达式，或者，确切地说，将 $\overrightarrow{OP}$ 的表达式代入题中的等式去验证即可．

在具体运算时，把向量用其分量表示是向量运算中的一种手段．直接用向量形式进行运算有时显得简捷一些．

由于诸 λ_i 以线性形式出现，并且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0$，因此实际上可设 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$．这只需在等式两边同除以 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，并以 $\mu_i=\lambda_i/\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$ 代替 λ_i 即可．

证法 2 设 $P\in\mathbb{R}^3$ 对于给定的点 $A_i\in\mathbb{R}^3$ 和实数 $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ 满足题设

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QP},\qquad \forall Q\in\mathbb{R}^3. \tag{1}$$

令 Q 为 $\mathbb{R}^3$ 的原点 O；$\mu_i=\lambda_i/\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,\ i=1,2,\ldots,n$，则等式 (1) 确定了点 $P:\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,\overrightarrow{OA_i}$．这也说明了，若要求的点 P 存在，则必是唯一的．

对 $\forall Q\in\mathbb{R}^3$，有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QP}&=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OP})=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QO}+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{OP}\\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QO}+\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,\overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{QO}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{OA_i}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OA_i})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\overrightarrow{QA_i},\end{aligned}$$

即所要求的等式成立．

说明 本题的证明事实上与所讨论的空间 $\mathbb{R}^3$ 的维数无关．因此可把题目中出现的几处 $\mathbb{R}^3$ 都改为 $\mathbb{R}^m$，$m\in\mathbb{N}$，命题仍是对的．

5.1.5 设 A 为 n 阶幂零方阵，即存在自然数 N，使 $A^{N-1} \neq 0$，而 $A^N = 0$. 试证：$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/(k!)$ 与 $E + A$ 相似，其中 E 为 n 阶单位方阵，又 $A^0 = E$.

证法 1　由 $A^N = 0$ 可知

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} A^k.$$

另一方面，由 A 幂零，所以 A 的本征值都是零，于是 A 有 Jordan 标准形

$$J = \operatorname{diag}(N_1, \ldots, N_s),$$

其中

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

为 $e_j \times e_j$ 方阵，$j = 1, 2, \ldots, s$. 因此

$$J^k = \operatorname{diag}(N_1^k, \ldots, N_s^k),$$

其中

$$N_j^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{第} e_j - k + 1 \text{行}$$

今存在 n 阶非异方阵 P，使得

$$A = PJP^{-1},$$

所以

$$
\begin{aligned}
\exp A &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}A^k\\
&= P\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}J^k\right)P^{-1}\\
&= P\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}\operatorname{diag}\left(N_1^k,\ldots,N_s^k\right)\right)P^{-1}\\
&= P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}N_1^k,\ldots,\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}N_s^k\right)P^{-1}.
\end{aligned}
$$

记

$$
X_i=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}N_i^k.
$$

由于 N_i 为 e_i 阶幂零方阵，所以 $N_i^{e_i-1}\neq 0$, $N_i^{e_i}=0$. 因此 $0\leq e_i\leq N$, 即有

$$
X_i=\sum_{k=0}^{e_i-1}\frac{1}{k!}N_i^k=\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(e_i-1)!}\\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}\\
 & & & \ddots & \frac{1}{1!}\\
 & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

再计算 λ 矩阵 $E-\exp A$ 之初等因式．今

$$
\begin{aligned}
\lambda E-\exp A &= \lambda E-P\operatorname{diag}(X_1,\ldots,X_s)P^{-1}\\
&= P[\lambda E-\operatorname{diag}(X_1,\ldots,X_s)]P^{-1}\\
&= P\operatorname{diag}(\lambda E_1-X_1,\ldots,\lambda E_s-X_s)P^{-1},
\end{aligned}
$$

其中 E_i 为 e_i 阶单位方阵．由于 P 为常数方阵，所以 $\lambda E-\exp A$ 的初等因式就是

$$
\operatorname{diag}(\lambda E_1-X_1,\ldots,\lambda E_s-X_s)
$$

之初等因式，因此由 λ 矩阵

$$
\lambda E_i-X_i,\qquad 1\leq i\leq s
$$

之初等因式合并而成．

但是

$$\lambda E_i - X_i = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{1!} & -\frac{1}{2!} & \cdots & -\frac{1}{(e_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2!} \\ & & & \ddots & -\frac{1}{1!} \\ & & & & \lambda-1 \end{pmatrix},$$

它的行列式因式为

$$D_{i1} = (\lambda-1)^{e_i},$$

$$D_{i2} = 1,$$

$$\vdots$$

$$D_{ie_i} = 1,$$

所以不变因式为

$$d_{i1} = (\lambda-1)^{e_i},$$

$$d_{i2} = 1,$$

$$\vdots$$

$$d_{ie_i} = 1,$$

因此初等因式为

$$(\lambda-1)^{e_i}.$$

于是 $\exp A$ 之初等因式组为

$$\{(\lambda-1)^{e_i}, \qquad 1 \le i \le s\}$$

同理计算 $E+A$ 之初等因式组. 令

$$\begin{aligned} \lambda A - (E+A) &= (\lambda-1)E - A \\ &= (\lambda-1)E - P\operatorname{diag}(N_1, \ldots, N_s)P^{-1} \\ &= P[(\lambda-1)E - \operatorname{diag}(N_1, \ldots, N_s)]P^{-1} \\ &= P\operatorname{diag}((\lambda-1)E_1 - N_1, \ldots, (\lambda-1)E_s - N_s)P^{-1}, \end{aligned}$$

而

$$(\lambda-1)E_i-N_i=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ & & & \lambda-1\end{pmatrix},$$

所以它的行列式因式组与 $\lambda E_i-\sum_{k=1}^{e_i-1}\frac{1}{k!}N_i^k$ 的相同，因此不变因式组也相同，所以初等因式组仍为单个 $(\lambda-1)^{e_i}$，因此方阵 $I+A$ 之初等因式组仍为

$$\{(\lambda-1)^{e_i},\quad 1\le i\le s\}$$

于是 $\exp A$ 和 $E+A$ 之初等因式组相同．这证明了它们相似．证毕．

5.1.6 设 S 为 n 阶实对称方阵，且 S 之秩为 r．试证：S 中存在 r 阶主子式不等于零．

证法 1 设 S 的秩为 r．由于实对称方阵实正交相似于对角形，即存在 n 阶非异方阵 P，使得

$$S=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 为 S 的 n 个本征值，由于 S 之秩为 r，所以 $\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 的秩为 r．因此恰有 $n-r$ 个本征值为零，记作 $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$．令 S 的特征多项式

$$\det(\lambda I-S)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j)=\lambda^{n-r}\prod_{j=1}^{r}(\lambda-\lambda_j),$$

其中 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r\ne 0$．所以 S 的特征多项式恰有 $n-r$ 个零根，即

$$\det(\lambda I-S)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-r}\lambda^{n-r},$$

其中 $a_{n-r}=(-1)^r\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r\ne 0$．

另一方面，记

$$S=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

于是

$$\det(\lambda I - S) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由行列式之定义可知

$$\det(\lambda I - S) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

其中 $(-1)^1 a_1$ 为所有 $n-1$ 阶主子式之和， $(-1)^2 a_2$ 为所有 $n-2$ 阶主子式之和， $\cdots, (-1)^{n-1}a_{n-1}$ 为所有 1 阶主子式之和．于是 $(-1)^{n-r}a_{n-r}$ 为所有 r 阶主式子式之和，它不等于零，因此必有一个 r 阶主子式不等于零．证毕．

证法 2　记

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

令 S 之秩为 r. 设 S 中有一个最大阶数之非零主子式，记此阶数为 s. 由秩的定义可知 $s \le r$. 显然，无妨设 S 之前 s 行，前 s 列决定之主子矩阵非异．将 S 按前 s 行，前 s 列分块为

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0.$$

当 $s = r$ 时不用再证了，因为 S 中存在一个 r 阶主子式不为零．若 $s < r$, 下面来推出矛盾．当 $r = n$ 时 $\det S \neq 0$, 所以 S 之 n 阶主子式 $\det S \neq 0$. 断言成立．因而不妨设 $r < n$.

有 $r \ge s+1$. 作如下之 $s+1$ 阶主子矩阵

$$\begin{pmatrix} A & \alpha_i \\ \alpha_i' & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

由 A 之选取可知上述矩阵的行列式为零，即有

$$
\begin{aligned}
0 &= \det\begin{pmatrix} A & \alpha_i \\ \alpha_i' & a_{ii} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha_i' A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha_i \\ \alpha_i' & a_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha_i' A^{-1} & 1 \end{pmatrix}' \\
&= \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a_{ii} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这证明了

$$a_{ii} = \alpha_i' A^{-1}\alpha_i.$$

由 $n-1 \geq r \geq s+1$ 可知 $n-s \geq 2$. 于是又可作如下 $s+2$ 阶主子矩阵

$$\begin{pmatrix} A & \alpha_i & \alpha_j \\ \alpha_i' & a_{ii} & a_{ij} \\ \alpha_j' & a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

由 A 之选取可知上述矩阵的行列式也为零，即有

$$
\begin{aligned}
0 &= \det\begin{pmatrix} A & \alpha_i & \alpha_j \\ \alpha_i' & a_{ii} & a_{ij} \\ \alpha_j' & a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix} \\
&= \left|\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\alpha_i' A^{-1} & 1 & 0 \\ -\alpha_j' A^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha_i & \alpha_j \\ \alpha_i' & a_{ii} & a_{ij} \\ \alpha_j' & a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\alpha_i' A^{-1} & 1 & 0 \\ -\alpha_j' A^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}'\right| \\
&= \det\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_i & a_{ij} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_j \\ 0 & a_{ij} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_i & a_{jj} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_j \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

这证明了

$$\det\begin{pmatrix} a_{ii} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_i & a_{ij} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_j \\ a_{ij} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_i & a_{jj} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_j \end{pmatrix} = 0.$$

现在考虑

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B'A^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B'A^{-1} & I \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C-B'A^{-1}B \end{pmatrix}$$

可知

$$\begin{aligned} r = \operatorname{rank} S &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C-B'A^{-1}B \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(C-B'A^{-1}B). \end{aligned}$$

由 $\operatorname{rank} A = s$ 有

$$\operatorname{rank}(C-B'A^{-1}B) = r-s \geq 1.$$

但是 $C-B'A^{-1}B$ 之一阶主子式形如

$$a_{ii} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_i = 0,$$

又二阶主子式形如

$$\det\begin{pmatrix} a_{ii} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_i & a_{ij} - \alpha_i' A^{-1}\alpha_j \\ a_{ij} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_i & a_{jj} - \alpha_j' A^{-1}\alpha_j \end{pmatrix} = 0,$$

所以证明了 $C-B'A^{-1}B$ 之阶数 ≥ 2, 且所有一阶主子式及二阶主子式都等于零. 我们来证

$$C-B'A^{-1}B = 0.$$

事实上, 任意实对称方阵, 若它的一阶主子式都等于零, 则形如

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ii} = 0,$$

而任意二阶主子式形如

$$\det\begin{pmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ij} & c_{jj} \end{pmatrix} = -c_{ij}^2, \quad i < j,$$

它们都等于零, 即 $c_{ij} = 0$, $i < j$. 这证明了此实对称方阵等于零.

至此我们证明了

$$C = B'A^{-1}B.$$

所以 $r = \operatorname{rank} S = \operatorname{rank} A$, 即 S 中存在一个 r 阶主子式不为零. 证毕.

第二试

5.2.1 设 $a_1,\ldots,a_n$ 为 n 个给定的整数，它们不全为零，且其最大公因子为 1. 试证：对任一整数 m, 方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = m$$

必有整数解.

证 先证一命题：条件如题目中所给，则方程 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$ 必有整数解.

用归纳法证明此命题. 当 $a_1=1, a_2=0$ 时，可取整数 $u_1=1, u_2=0$, 它们满足 $a_1u_1+a_2u_2=1$. 而对于有最大公因子 1 、全不为零的两个整数 a_1, a_2, 由辗转相除法易证存在整数 u_1, u_2, 使得 $a_1u_1+a_2u_2=1$. 即命题对于 $n=2$ 成立. 现设命题对于 $n=k\geq 2$ 成立, 并设不全为零的整数 $a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}$ 的最大公因子为 1. 不妨设 $a_1,\ldots,a_k$ 不全为零 (否则考虑 $a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}$). 由归纳假设知存在整数 $u_1,\ldots,u_k$, 使得对题中给定的 $a_1,\ldots,a_n$, 存在整数 $u_1,\ldots,u_n$, 使得 $a_1u_1+\cdots+a_ku_k=1$. 此时若取 $u_{k+1}=0$, 则 $a_1u_1+\cdots+a_ku_k+a_{k+1}u_{k+1}=1$. 即命题对于 $n=k+1$ 成立. 因此命题成立.

现对题中给定的 $a_1,\ldots,a_n$, 存在整数 $u_1,\ldots,u_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1.$$

取

$$x_i = mu_i, \qquad 1\leq i\leq n,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = m\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = m.$$

这证明了断言.

5.2.2 记单位圆之内接正 n 边形之周长为 $2a_n$, 熟知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi.$$

由直接计算得 $a_6 = 3$, $a_{12} = 3.105\,828\,54$, $a_{24} = 3.132\,628\,61$. 如果令

$$b_n = \frac{1}{3}(4a_{2n} - a_n),$$

$$c_n = \frac{1}{15}(16b_{2n} - b_n),$$

则由 a_6, a_{12}, a_{24} 可算出

$$c_6 = 3.141\,592\,05.$$

断言"序列 $\{c_n\}$ 比序列 $\{a_n\}$ 更快地收敛于 π"对吗？请证明你的结论.

分析 由于 $a_n = n\sin(\pi/n)$, 因此用 Taylor 展开式来表示 a_n 时, $a_n - \pi$ 趋于 0 的程度可以 $1/n$ 的幂次来衡量. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} b_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{3}(4a_{2n} - a_n)\right]\\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}(4a_{2n} - a_n) = \frac{1}{3}(4\pi - \pi) = \pi,\\ \lim_{n\to+\infty} c_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{15}(16b_{2n} - b_n)\right]\\ &= \frac{1}{15}\lim_{n\to+\infty}(16b_{2n} - b_n) = \frac{1}{15}(16\pi - \pi) = \pi,\end{aligned}$$

所以 $c_n - \pi$ 也是与 $1/n$ 的某次幂同阶的无穷小. 所以只需且必须比较 $a_n - \pi$ 与 $c_n - \pi$ 的无穷小的阶. 可对 a_n 作其 Taylor 展开式, 再由它得到 b_n 的, 乃至 c_n 的 Taylor 展开式. 两者比较可得结论.

解 序列 $\{c_n\}$ 比 $\{a_n\}$ 更快地收敛于 π.

易知 $a_n = n\sin(\pi/n)$. 又 $\sin x$ 的 Taylor 展开式为

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

因此

$$\begin{aligned}a_n &= n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k-1} = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\\ &= \pi\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],\end{aligned}$$

所以 $a_n - \pi$ 是与 $(1/n)^2$ 同阶的无穷小. 又

$$
\begin{aligned}
4a_{2n} &= \pi\left[4+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\frac{1}{4^{k-2}}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],\\
b_n &= \frac{1}{3}(4a_{2n}-a_n)\\
&= \frac{1}{3}\left\{\pi\left[4+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\frac{1}{4^{k-2}}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\right.\\
&\qquad\left.-\pi\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\right\}\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],
\end{aligned}
$$

所以 $b_n-\pi$ 是与 $(1/n)^4$ 同阶的无穷小. 又

$$
\begin{aligned}
16b_{2n} &= \pi\left[16+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\frac{1}{4^{k-3}}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],\\
c_n &= \frac{1}{15}(16b_{2n}-b_n)\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 15}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 15}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],
\end{aligned}
$$

所以 $c_n-\pi$ 是与 $(1/n)^6$ 同阶的无穷小.

因此 $\{c_n\}$ 比 $\{a_n\}$ 更快地收敛于 π.

5.2.3 试计算 $\sqrt[5]{2}$, 精确到小数点后 3 位.

分析 1. 众所周知, Taylor 公式可用于近似计算. 设要求某个 "好" 函数 f 在某一点 x 处的值, 如果与 x 邻近的某个值 x_0 处的 f 值, f' 值, $\cdots$, $f^{(k)}$

值都较易求得，那么由

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_k(x),$$

我们可以计算 $\sum_{n=0}^{k}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$ 以作为 $f(x)$ 的近似值，它们的误差由余项 $R_k(x)$ 来估计.

例如，$\sqrt[5]{2}=f(2)\doteq f((1.14)^5)+f'((1.14)^5)[2-(1.14)^5]$, 其中 $f(x)=x^{\frac{1}{5}}$; 误差由 $\frac{1}{2}f''(\xi)[2-(1.14)^5]^2$ 来估计，其中 ξ 位于 $(1.14)^5$ 与 2 之间.

2. 根据数 2 的特点：$2=4/2=(4/3)/(2/3)=(1+1/3)/(1-1/3)$, 可知

$$2^{\frac{1}{5}}=\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}=g\left(\frac{1}{3}\right)\Big/g\left(-\frac{1}{3}\right),$$

其中 $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{5}}$. 当 $|x|<1$ 时 $g(x)$ 可在 $x_0=0$ 处展开成 Taylor 级数

$$g(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{g^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!}x^{k+1},\qquad \theta\in(0,1).$$

因而可先得 $g(1/3)$, $g(-1/3)$, 继而求得 $\sqrt[5]{2}$.

3. 用于近似计算另一较有力的工具是 Newton 切线法 —— 求方程 $f(x)=0$ 的近似根的方法. 这样, 把 Newton 切线法用于近似求解方程 $x^5-2=0$, 则求得的结果即为 $\sqrt[5]{2}$ 的近似值.

简单介绍一下 Newton 切线法.

设函数 $f\in C^2([a,b])$, $f(a)\cdot f(b)<0$, $f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

由 $f(a)\cdot f(b)<0$ 及 $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$, 容易知道 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中只有唯一解 $\xi\in(a,b)$.

不妨设 $f(a)<0<f(b)$ (因而 $f'(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$), 并设 $f''(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$.

过 (x,y) 平面上的点 $(b,f(b))$ 作函数 $y=f(x)$ 的图象的切线 $y=f(b)+f'(b)(x-b)$, 它与横坐标轴 $y=0$ 相交于点 $(x_1,0)$, 这里 $x_1=b-f(b)/f'(b)$. 则有 $\xi<x_1<b$. 事实上，由于 $f(b)>0$, $f'(b)>0$, 所以 $x_1<b$; 再者，由于

$$0=f(\xi)=f(b)+f'(b)(\xi-b)+\frac{1}{2}f''(c)(\xi-b)^2,$$

这里 $\xi<c<b$, 所以

$$f(b)+f'(b)(\xi-b)=-\frac{1}{2}f''(c)(\xi-b)^2<0,$$

因此

$$\begin{aligned}\xi - x_1 &= \xi - b + \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{1}{f'(b)}[f(b) + f'(b)(\xi - b)] \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(b)}(\xi - b)^2 < 0,\end{aligned}$$

所以 $\xi < x_1$.

过点 $(x_1, f(x_1))$ 作 $y = f(x)$ 的图象的切线 $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, 与 $y = 0$ 交于点 $(x_2, 0)$, $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, $\xi < x_2 < x_1$.

这个过程一直可以进行下去，可以得到序列 $\{x_k\}$, 满足

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中 $x_0 = b$, 并且 $\xi < \cdots < x_{k+1} < x_k < \cdots < x_1 < b$.

以 x_k 作为 $f(x) = 0$ 的根 ξ 的近似，有下述误差估计：

$$|x_k - \xi| \le \frac{|f(x_k)|}{m}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

其中 $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$. 事实上，对某个 $\eta \in (\xi, x_k)$, 有 $f(x_k) = f(\xi) + f'(\eta)(x_k - \xi) = f'(\eta)(x_k - \xi)$, 所以 $x_k - \xi = f(x_k)/f'(\eta)$, 所以 $|x_k - \xi| = |f(x_k)|/|f'(\eta)| \le |f(x_k)|/m$.

当 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ 时 (对 $\forall x \in [a, b]$), 则过点 $(a, f(a))$ 作切线，与 $y = 0$ 的交点的横坐标为 $x_1 = a - f(a)/f'(a)$, 有 $a < x_1 < \xi$. 相应的序列 $\{x_k\}$ 满足

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中 $x_0 = a$, 并且 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < \xi$. 误差估计亦为

$$|x_k - \xi| \le \frac{|f(x_k)|}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad m = \min_{[a,b]} |f'(x)|.$$

解法 1 令 $f(x) = x^5 - 2$. 由于 $f(1) = -1 < 0 < 30 = f(2)$, $f'(x) = 5x^4 > 0$, $\forall x > 0$, 所以 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 中有唯一的根 $\xi = \sqrt[5]{2}$. 也有 $f''(x) = 20x^3 > 0$, $\forall x > 0$.

由于 $f(1.2) = (1.2)^5 - 2 = 2.488\,32 - 2 = 0.488\,32 > 0$, 所以 $1 < \xi < 1.2$. 又 $f'(1.2) = 5 \cdot (1.2)^4 = 5 \cdot 2.073\,6 = 10.368$.

令 $x_1 = 1.2 - f(1.2)/f'(1.2) = 1.2 - 0.488\,32/10.368 \doteq 1.2 - 0.047 = 1.153$.

因为

$$f(1.15)=(1.15)^5-2=2.011\,357\,187\,5-2=0.011\,357\,187\,5>0,$$

所以可令 $x_1=1.15$. 因为

$$f'(1.15)=5\cdot(1.15)^4=5\cdot1.749\,006\,25=8.745\,031\,25,$$

所以

$$\begin{aligned}x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}&=1.15-\frac{0.011\,357\,187\,5}{8.745\,031\,25}\\&\doteq1.15-0.001\,3=1.148\,7.\end{aligned}$$

因为 $f(1.148\,7)=0.000\,014\,2\pm10^{-7}>0$, 所以 $\xi<1.148\,7$. 取 $x_2=1.148\,7$.

因为 $f(x_2)=f(\xi)+f'(\eta)(x_2-\xi)=f'(\eta)(x_2-\xi)$, $\eta\in(\xi,x_2)$, 所以 $0<x_2-\xi=f(x_2)/f'(\eta)<f(x_2)/f'(1)<0.000\,014\,3/5=0.000\,002\,86<0.000\,003$, (因为 $f'(x)$ 在 $[1,1.2]$ 中单调增.)

所以 $x_2-0.000\,003<\xi<x_2$, 即有 $1.148\,697<\sqrt[5]{2}<1.148\,7$.

说明 以 1.2 作为初值算出 $x_1\doteq1.153$ 后，由于再用 1.153 进行以后的计算较繁，并且 $f(1.15)>0$, 因此可以用 1.15 代替 1.153 作为 x_1 来进行以后的计算. 同样，由 $x_1=1.15$ 及递推式 $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$ 进行计算时，虽然用 $x_1, f(x_1), f'(x_1)$ 的精确值代入，但只算出 $f(x_1)/f'(x_1)$ 的近似值，即 "粗略" 地算出了 x_2. 对于此 x_2 的值， $f(x_2)>0$, 所以 $\xi<x_2$. 由于此时 x_2 与所求值 $\xi=\sqrt[5]{2}$ 的误差小于 0.3×10^{-5}, 已满足要求，因此就此止步.

从上面的说明可知，在中间步骤，都可只 "粗略" 计算即可，重要的是最后 $|x_k-\xi|$ 的估计.

解法 2 令 $f(x)=x^{\frac{1}{5}}$. 要计算 $f(2)=2^{\frac{1}{5}}$.

因为当 $x>0$ 时， $f'(x)=x^{-\frac{4}{5}}/5>0$, $f''(x)=-4x^{-\frac{9}{5}}/25<0$, 所以在 $(0,+\infty)$ 上 f 严格单调增， f' 严格单调减.

取 $x_0>0$, 有

$$f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(2-x_0)^2,$$

其中 η 位于 2 与 x_0 之间.

因为 $f''(\eta)=-4\eta^{-\frac{9}{5}}/25<0$,

所以 $f(2)<f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)$.

因为 $(1.14)^5\doteq1.92<2<2.01\doteq(1.15)^2$,

所以 $1.14\doteq f((1.14)^5)<f(2)<f((1.15)^2)=1.15$.

令 $x_0=(1.15)^5$, 则 $x_0=2.011\,3\pm10^{-4}$, $f(x_0)=1.15$,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{5}x_0^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x_0^{4/5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(f(x_0))^4}\\ &=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1.15)^4}=0.114\,3\pm10^{-4}, \end{aligned}$$

$2-x_0=-0.011\,3\pm10^{-4}$. 又有

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}f''(\eta)(2-x_0)^2\right| &= \frac{4}{50}\eta^{-\frac{9}{5}}(2-x_0)^2\\ &=0.08\eta^{-\frac{9}{5}}(2-x_0)^2, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}f''(\eta)(2-x_0)^2\right| &< 0.08\times(0.011\,4)^2<0.000\,02,\\ \left|\frac{1}{2}f''(\eta)(2-x_0)^2\right| &> 0.08\times2^{-\frac{9}{5}}\times(0.011\,2)^2\\ &> 0.08\times2^{-2}\times(0.011\,2)^2>0.000\,002. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)\\ =&\ 1.15-(0.114\,3\pm10^{-4})\cdot(0.011\,3\pm10^{-4})\\ =&\ 1.15-(0.001\,3\pm10^{-4}), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2} &= f(2)<1.15-0.001\,2-0.000\,002=1.148\,798<1.148\,8,\\ \sqrt[5]{2} &= f(2)>1.15-0.001\,4-0.000\,02=1.148\,58, \end{aligned}$$

所以

$$1.148\,58<\sqrt[5]{2}<1.148\,8.$$

解法 3 因为 $2=(1+1/3)\,/\,(1-1/3)$, 所以 $2^{\frac{1}{5}}=(1+1/3)^{\frac{1}{5}}\,/\,(1-1/3)^{\frac{1}{5}}$. 令 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{5}}$, 则 $2^{\frac{1}{5}}=f\,(1/3)\,/\,f\,(-1/3)$.

当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\\ &\equiv F_n(x)+R_n(x), \end{aligned}$$

其中 $\theta=\theta(x)\in(0,1)$. 因为 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{5}}$, 所以

$$f'(x)=\frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}},$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{4\cdot 9\cdots(5k-6)}{5^k}(1+x)^{-k+\frac{1}{5}},$$

$$k=2,3,\cdots.$$

因为

$$\begin{aligned}\left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta/3)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right| \\ &= \left|(-1)^n\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{\theta}{3}\right)^{-(n+1)+\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right| \\ &= \frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{3^{n+1}\cdot 5^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{\theta}{3}\right)^{-(n+1)+\frac{1}{5}},\end{aligned}$$

所以

$$\left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{(n+1)!\cdot 3^{n+1}\cdot 5^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot 5}.$$

当 $n=5$ 时,

$$\left|R_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{1}{5\cdot 6\cdot 3^6}=\frac{1}{21\,870}<0.000\,045\,8;$$

又

$$\begin{aligned}\left|R_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| &> \frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19\cdot 24}{3^6\cdot 5^6}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-6+\frac{1}{5}} \\ &> \frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19\cdot 24}{4^6\cdot 5^6\cdot 6!}>0.000\,004\,9.\end{aligned}$$

此外, $R_5\left(\frac{1}{3}\right)<0$. 因为

$$\begin{aligned}\left|R_n\left(-\frac{1}{3}\right)\right| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(-\theta/3)}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right| \\ &= \left|(-1)^n\frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{5^{n+1}}\cdot\left(1-\frac{\theta}{3}\right)^{-(n+1)+\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right| \\ &= \frac{4\cdot 9\cdots(5n-1)}{3^{n+1}\cdot 5^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{\theta}{3}\right)^{-(n+1)+\frac{1}{5}},\end{aligned}$$

所以

$$\left|R_7\left(-\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{4\cdot 9\cdot 14\cdots 34}{3^8\cdot 5^8}\cdot\frac{1}{8!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-8+\frac{1}{5}}$$

$$< \frac{4\cdot 9\cdot 14\cdots 34}{2^8\cdot 5^8\cdot 8!} < 0.000\,056\,3,$$

$$\left|R_7\left(-\frac{1}{3}\right)\right| > \frac{4\cdot 9\cdot 14\cdots 34}{3^8\cdot 5^8\cdot 8!} > 0.000\,002\,19,$$

并且 $R_7\left(-\frac{1}{3}\right) < 0$. 因为

$$F_5\left(\frac{1}{3}\right) = 1+\frac{1}{5\cdot 3}-\frac{4}{2!\cdot 5^2\cdot 3^2}+\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 3^3}-\frac{4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 3^4}+\frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5!\cdot 5^5\cdot 3^5}$$

$$= 1+\frac{3^3\cdot 5^5-2\cdot 3^2(5^4+5^3)-3\cdot 5^2\cdot 7+7\cdot 19}{3^4\cdot 5^6}$$

$$= 1+\frac{74\,983}{1\,265\,625} = 1.059\,24\pm 10^{-5},$$

$$F_7\left(-\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{1}{5\cdot 3}-\frac{4}{2!\cdot 5^2\cdot 3^2}-\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3\cdot 3^3}-\frac{4\cdot 9\cdot 14}{4!\cdot 5^4\cdot 3^4}-\frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19}{5!\cdot 5^5\cdot 3^5}$$

$$-\frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19\cdot 24}{6!\cdot 5^6\cdot 3^6}-\frac{4\cdot 9\cdot 14\cdot 19\cdot 24\cdot 29}{7!\cdot 5^7\cdot 3^7}$$

$$= 1-\frac{2^2(3\cdot 5\cdot 7\cdot 19+19\cdot 29)}{3^6\cdot 5^8}$$

$$-\frac{3^3\cdot 5^5+2\cdot 3^2(5^4+5^3)+3\cdot 5^2\cdot 7+7\cdot 19}{3^4\cdot 5^6}$$

$$= 0.922\,12\pm 10^{-5},$$

又因为

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = F_5\left(\frac{1}{3}\right)+R_5\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = F_7\left(-\frac{1}{3}\right)+R_7\left(-\frac{1}{3}\right),$$

所以

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < 1.059\,25-0.000\,004\,9 = 1.059\,245\,1 < 1.059\,3,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) > 1.059\,23-0.000\,045\,8 = 1.059\,184\,2 > 1.059\,1,$$

所以

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=1.0592\pm 10^{-4};$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)<0.92213-0.00000219=0.92212781<0.9222,$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)>0.92211-0.0000563=0.9220537>0.9220,$$

所以

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=0.9221\pm 10^{-4}.$$

所以

$$2^{\frac{1}{5}}=f\left(\frac{1}{3}\right)\Big/f\left(-\frac{1}{3}\right)<\frac{1.0593}{0.9220}<1.14892,$$

$$2^{\frac{1}{5}}>\frac{1.0591}{0.9222}>1.14844.$$

所以

$$1.14844<\sqrt[5]{2}<1.14892.$$

5.2.4 设 $a_n\geq 0,\ n=1,2,\ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$. 试证:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)}\leq\pi,\ m=1,2,\ldots;$

(b) $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}\leq\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.$

分析 (a) 对于固定的 m, $b_{m,n}=\sqrt{m}/\sqrt{n}\,(m+n)$ 是 n 的单调减函数, 因此可以用积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_m(x)\,\mathrm{d}x$ 作为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m}/\sqrt{n}\,(m+n)$ 的上界估计, 这里

$$f_m(x)=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}\,(m+x)}$$

在 $(0,+\infty)$ 上是可积的, $m=1,2,\ldots$. 所以

$$\int_1^{+\infty}f_m(x)\,\mathrm{d}x<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)},$$

因此作为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}$ 的上界估计，$\int_0^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x$ 已相当精确了．事实上，

$$\begin{aligned}0 &< \int_0^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\\ &< \int_0^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}(m+x)}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{\sqrt{m}}{m\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{m}},\end{aligned}$$

右端当 m 趋于 $+\infty$ 时趋于 0.

(b) 为了从所欲证的不等式 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m a_n/(m+n) \le \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的左端引导出右端的 a_n^2 和 π, 首先注意这在提示应用结论 (a); 其次注意 $a_m a_n/(m+n)$ 关于 m, n 的对称性．似乎可用不等式 $a_m a_n \le (a_m^2 + a_n^2)/2$ 来导出 a_n^2. 但这样做后并未导出所需要的表达式 $\sqrt{m}/\sqrt{n}(m+n)$ 或 $\sqrt{n}/\sqrt{m}(m+n)$. 因此需要用 "凑" 的技巧 (有了目标后经常用此法):

因为对 $\forall c > 0$ 有

$$a_m a_n = (a_m\sqrt{c}) \cdot (a_n/\sqrt{c}) \le \frac{1}{2}\left(a_m^2 c + \frac{a_n^2}{c}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n} &\le \frac{1}{2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m^2 c}{m+n} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{m+n}\cdot\frac{1}{c}\right)\\ &\overset{\triangle}{=} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m^2 c}{m+n} \overset{\triangle}{=} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m^2\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \le \pi \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2,\end{aligned}$$

(由于结论 (a))

其中，两个等号处的 "△" 表示对待定的数 c 提出要求，以使这两个等号成立 (这就是在 "凑")．第 1 个 △ 处的等号要求表达式 $a_m^2 c/(m+n)$ 与 $a_n^2/(m+n)c$ 关于 m, n 对称；为了利用结论 (a), 则有第 2 个 △ 处的等号，它更具体地给出了 c 的表达式：$c = \sqrt{m}/\sqrt{n}$. 这表达式恰也能满足第 1 个要求：

$$\frac{a_m^2 c}{m+n} = \frac{a_m^2\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \text{ 和 } \frac{a_n^2}{m+n}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a_n^2\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)}$$

关于 m, n 对称.

证明 (a) 令 $f_m(x) = \sqrt{m}/\sqrt{x}(m+x)$, $m = 1, 2, \ldots$.

显然，对 $\forall m\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

因为 $f_m(x)$ 是 x 的严格单调减函数，所以

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)} < \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f_m(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}\,(m+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{m}}{m+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{2}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\,\mathrm{arctg}\, z\Big|_0^{+\infty} = \pi, \qquad m=1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

(b) 对于任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 有

$$a_m a_n = a_m\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac14}\cdot a_n\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac14} \le \frac12\left[a_m^2\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac12} + a_n^2\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac12}\right],$$

因此，对 $\forall K\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
S_K &\equiv \sum_{m,n=1}^{K}\frac{a_m a_n}{m+n} \\
&\le \frac12\sum_{m,n=1}^{K}\left(a_m^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)} + a_n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)}\right) \\
&= \frac12\sum_{m,n=1}^{K} a_m^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\,(m+n)} + \frac12\sum_{m,n=1}^{K} a_n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} \\
&= \sum_{m,n=1}^{K} a_n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} = \sum_{n=1}^{K} a_n^2\cdot\sum_{m=1}^{K}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} \\
&\le \sum_{n=1}^{K} a_n^2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\,(m+n)} \le \pi\sum_{n=1}^{K} a_n^2 \le \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.
\end{aligned}$$

现考虑正项二重级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m a_n/(m+n)$ 的部分和

$$S_{M,N} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n}, \qquad M,N\in\mathbb{N}.$$

令 $K=\max(M,N)$, 则显然有

$$S_{M,N} \le S_K \le \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

即部分和 $S_{M,N}$ 有上界 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, 因而正项级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty}a_m a_n/(m+n)$ 收敛，并以 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 为其和的上界.

5.2.5 试证：不等式

$$2ab\le e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b$$

对所有 $a>0,b>0$ 成立，并求出等式成立的必要且充分条件.

分析 这是两个变元的函数的不等式，在处理上较单变元函数的情形困难些. 由于函数表达式的复杂性 (即使对于同一变元而言，它也既含有指数函数，又含有其反函数对数函数), 因此要设法简化问题.

由于不等式左、右两边关于 a,b 的对称性，因此不妨试探证明不等式

$$ab\le e^{a-1}+b\ln b,\qquad a>0,\quad b>0.$$

这里，函数的表达式已简单多了：对于一个变元，它只含有指数函数，或只含有对数函数，而不含有其反函数. 因此，如果上面的不等式是正确的话，可以先固定一个变元，作为另一个变元的函数的不等式就容易证明了.

此外，由于 $2ab\le a^2+b^2$, 因此也可试探证明不等式

$$a^2\le e^{a-1}+a\ln a,\qquad a>0.$$

若此不等式成立，则原来要证明的不等式也成立. 这个不等式中虽然也包含了指数函数及其反函数，但毕竟是一元函数的不等式.

当然，作为二元函数，通过求其极值来证明不等式也许也并不是不可能的.

证法 1 先证不等式

$$ab\le e^{a-1}+b\ln b,\qquad a>0,\quad b>0.\tag{1}$$

固定 $a>0$, 令

$$f(b)=b\ln b-ab+e^{a-1},\qquad b>0.$$

欲证对 $\forall b>0$, $f(b)\ge 0$; 且等号成立，当且仅当 $b=e^{a-1}$.

事实上，因为 $f'(b)=\ln b+1-a$, 所以若令 $b_0=e^{a-1}$, 则 $b_0>0$, 且 $f'(b_0)=0$; 显然 $f'(b)<0$, 若 $b<b_0$; $f'(b)>0$, 若 $b>b_0$. 因此 $f(b)\ge f(b_0)$, $\forall b>0$, 且等号成立的充要条件为 $b=b_0$.

此外，注意到

$$f(b_0)=e^{a-1}\ln e^{a-1}-ae^{a-1}+e^{a-1}=0.$$

就证明了所欲证者.

这样，亦即证明了不等式 (1), 并且其中等号成立的充要条件为 $b=e^{a-1}$.

由对称性知，有

$$ab \le e^{b-1}+a\ln a, \qquad a>0, \quad b>0, \tag{2}$$

且等号成立的充要条件为 $a=e^{b-1}$.

把 (1), (2) 相加即得题中之不等式，且等号成立，当且仅当 $b=e^{a-1}$, $a=e^{b-1}$.

容易证明不等式 $e^{a-1}\ge a$, $\forall a\in\mathbb{R}$, 且等号成立 $\iff a=1$. 事实上，令 $g(a)=e^{a-1}-a$, 则 $g(1)=0$, $g'(a)=e^{a-1}-1$ 与 $a-1$ 同号，所以 $g(a)\ge g(1)=0$, $\forall a\in\mathbb{R}$, 且等号成立 $\iff a=1$.

因此，

$$\begin{aligned}&\text{题中不等式的等号成立}\\ \iff& b=e^{a-1},\quad a=e^{b-1}\\ \iff& b=e^{a-1}\ge a=e^{b-1}\ge b\\ \iff& a=b=1.\end{aligned}$$

说明 为证明不等式 (1), 也可先固定 $b>0$, 令 $g(a)=e^{a-1}-ba+b\ln b$, $a\in\mathbb{R}$. 则

$g'(a)=e^{a-1}-b<0$, 若 $a<a_0$; $g'(a)=0$, 若 $a=a_0$; $g'(a)>0$, 若 $a>a_0$. 这里 $a_0=\ln b+1$.

所以 $g(a)\ge g(a_0)$, $\forall a\in\mathbb{R}$, 且等号成立 $\iff a=\ln b+1$. 而 $g(a_0)=\exp(\ln b)-b(\ln b+1)+b\ln b=0$,

所以 $e^{a-1}-ba+b\ln b\ge 0$, $\forall a\in\mathbb{R}$, 且等号成立 $\iff a=\ln b+1$. 亦即

$$ab\le e^{a-1}+b\ln b, \qquad a>0, \quad b>0,$$

且等号成立 $\iff b=e^{a-1}$.

以下与证法 1 相同即证明了题中的不等式，且等号成立 $\iff a=b=1$.

证法 2 先证明不等式

$$a^2\le e^{a-1}+a\ln a,\ a>0,\ \text{且等号成立} \iff a=1. \tag{3}$$

令 $f(a)=e^{a-1}+a\ln a-a^2, a>0$. 则

$$\begin{aligned}
f'(a) &= e^{a-1}+\ln a+1-2a,\\
f''(a) &= e^{a-1}+\frac{1}{a}-2,\\
f'''(a) &= e^{a-1}-\frac{1}{a^2},\\
f^{(4)}(a) &= e^{a-1}+\frac{2}{a^3}>0, \qquad \forall a>0,
\end{aligned}$$

所以 $f'''(a)$ 严格单调增，且因为 $f'''(1)=0$,

所以 $f''(a)$ 在 $(0,1)$ 中严格单调减，在 $(1,+\infty)$ 中严格单调增.

又因为 $f''(1)=0$, 所以 $f''(a)\ge 0, \forall a\in(0,+\infty)$, 且 $f''(a)=0 \Longleftrightarrow a=1$.

所以 $f'(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 中严格单调增.

又因为 $f'(1)=0$, 所以 $f'(a)$ 与 $a-1$ 同号.

所以 $f(a)\ge f(1)=0, \forall a\in(0,+\infty)$, 且 $f(a)=0 \Longleftrightarrow a=1$.

即 $a^2\le e^{a-1}+a\ln a, a>0$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow a=1$.

因此得到

$$2ab\le a^2+b^2\le e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b, \qquad a>0, \quad b>0,$$

且题中不等式的等号成立 $\Longleftrightarrow$ 上面不等式中的两个等号同时成立 $\Longleftrightarrow a=b, a=1, b=1 \Longleftrightarrow a=b=1$.

证法 3 令 $f(a)=e^{a-1}/a+\ln a-a, a>0$. 则 $f(1)=0$, 且

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{ae^{a-1}-e^{a-1}}{a^2}+\frac{1}{a}-1=\frac{ae^{a-1}-e^{a-1}+a-a^2}{a^2}\\
&= \frac{(e^{a-1}-a)(a-1)}{a^2}.
\end{aligned}$$

由证法 1 中知 $e^{a-1}-a\ge 0, \forall a\in\mathbb{R}$, 且等号只在 $a=1$ 时成立，因此

$$f'(a)<0, \text{若 } a<1; \quad f'(a)=0, \text{若 } a=1; \quad f'(a)>0, \text{若 } a>1.$$

所以 $f(a)\ge f(1)=0, \forall a>0$, 且 $f(a)=0 \Longleftrightarrow a=1$, 即得

$$e^{a-1}+a\ln a\ge a^2, \forall a>0, \text{ 且等号成立} \Longleftrightarrow a=1.$$

以下与证法 2 同，即可证得题中的不等式，以及不等式中等号成立的充要条件为 $a=b=1$.

证法 4 令

$$f(a,b)=e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b-2ab, \qquad a>0, \quad b>0.$$

显然， $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$, 其中 $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$.

要证： $f(a,b)\geq 0$, $\forall a>0$, $b>0$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow a=b=1$. 这样，即证明了我们的结论.

先证一个辅助不等式：

$$a\ln a+e^{-1}\geq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}_+,\ \text{且等号成立}\Longleftrightarrow a=e^{-1}.$$

事实上，若令 $g(a)=a\ln a+e^{-1}$, 则 $g(e^{-1})=0$, 且 $g'(a)=\ln a+1$, 所以 $g'(a)<0$, 若 $a<e^{-1}$; $g'(a)=0$, 若 $a=e^{-1}$; $g'(a)>0$, 若 $a>e^{-1}$, 所以 $g(a)\geq g(e^{-1})=0$, $\forall a\in\mathbb{R}_+$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow a=e^{-1}$.

因此，

$$\lim_{a\to 0_+}f(a,b)=e^{-1}+e^{b-1}+b\ln b\geq e^{b-1}\geq e^{-1},\qquad \forall b>0;$$

$$\lim_{b\to 0_+}f(a,b)=e^{a-1}+a\ln a+e^{-1}\geq e^{a-1}\geq e^{-1},\qquad \forall a>0.$$

此外，显然有

$$\lim_{a\to+\infty}(e^{a-1}+a\ln a-a^2)=\lim_{b\to+\infty}(e^{b-1}+b\ln b-b^2)=+\infty,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}f(a,b)&=\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}(e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b-2ab)\\ &\geq\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}(e^{a-1}+a\ln a-a^2+e^{b-1}+b\ln b-b^2)\\ &=\lim_{a\to+\infty}(e^{a-1}+a\ln a-a^2)+\lim_{b\to+\infty}(e^{b-1}+b\ln b-b^2)=+\infty,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}f(a,b)=+\infty$.

显然， $f(1,1)=0<e^{-1}$.

综上所述， f 在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 的某个内点 (a_0,b_0) 处达到其最小值，且在 (a_0,b_0) 处 $\partial f/\partial a=\partial f/\partial b=0$.

所以 (a_0,b_0) 是下述方程组的一个解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a}=e^{a-1}+\ln a+1-2b=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial b}=e^{b-1}+\ln b+1-2a=0.\end{cases}$$

记 $h(x)=e^{x-1}+\ln x+2x+1$, $x>0$. 把上两式相减，得到 $h(a)-h(b)=0$, 即 $h(a)=h(b)$. 在 $\mathbb{R}_+$ 上 $h(x)$ 是严格单调增函数 (因为 e^{x-1}, $\ln x$, $2x$ 都是严

格单调增函数，1 是常数), 所以 $a=b$, 即 $a_0=b_0$.

把 $a=b$ 代入 $\partial f/\partial a=0$ 或 $\partial f/\partial b=0$ (两者的结果相同), 得

$$F(a)\equiv e^{a-1}+\ln a-2a+1=0.$$

我们断言，$F(a)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上严格单调增的函数，并且 $F(a)=0\Longleftrightarrow a=1$.

事实上，

$$\begin{aligned}F'(a)&=e^{a-1}+\frac{1}{a}-2\ge a+\frac{1}{a}-2\quad(\text{见证法 1})\\&\ge 0,\end{aligned}$$

并且，当 $a\ne 1/a$, 即 $a\ne 1$ 时 $F'(a)>0$. 因此，并由于显然有 $F(1)=0$, 所以我们的断言正确.

这样即得 $a_0=b_0=1$ 是方程组 $\partial f/\partial a=0,\partial f/\partial b=0$ 的唯一解. 所以 f 在 $a_0=1,b_0=1$ 处达到其最小值 0, 且 $f(a,b)>0$, 若 $(a,b)\ne(1,1)$.

说明 在证法 4 对 $f(a,b)$ 求极值的过程中，充分利用了 $f(a,b)$ 关于 a,b 的对称性. 如在 $f(a,b)$ 中先固定一个变元，对作为另一变元的函数的 $f(a,b)$ 求极值，则不易得到结果.

证法 5 设实函数 $f(x)$ 的定义域为 I, 且对 $\forall y\in I^*$, 有 $\sup\limits_{x\in I}\{xy-f(x)\}<+\infty$. 定义

$$f^*(y)=\sup_{x\in I}\{xy-f(x)\},\ y\in I^*,$$

称 f^* 为函数 f 的 Legendre 变换.

显然，由 f^* 的定义直接得到

$$f(x)+f^*(y)\ge xy,\qquad \forall x\in I,\quad y\in I^*.$$

现令 $f(a)=a\ln a, a\in\mathbb{R}_+=I=I^*$, 则 f 的 Legendre 变换 f^* 为

$$f^*(b)=\sup_{a\in\mathbb{R}_+}\{ab-a\ln a\}=\max_{a>0}\{ab-a\ln a\}=e^{b-1},\qquad b>0.$$

事实上，对固定的 $b\in\mathbb{R}_+$, 令 $g(a)=ab-a\ln a$, $a>0$. 则 $g'(a)=b-\ln a-1$ 是 $a>0$ 的严格单调减函数，它与 $a-e^{b-1}$ 的符号相反，因此

$$g(a)\le g(e^{b-1})=e^{b-1}\cdot b-e^{b-1}\ln e^{b-1}=e^{b-1},\quad \forall a>0,$$

且等号成立 $\Longleftrightarrow a=e^{b-1}$.

由 $f(a)+f^*(b)\ge ab$, $a>0$, $b>0$, 我们有

$$a\ln a+e^{b-1}\ge ab,\qquad a>0,\quad b>0.$$

由上述关于 $f^*(b)=e^{b-1}$ 的推导知，上不等式中等号成立 $\Longleftrightarrow a=e^{b-1}$.

同样有

$$b\ln b+e^{a-1}\geq ab,\qquad a>0,\quad b>0,$$

$$\text{等号成立}\Longleftrightarrow b=e^{a-1}.$$

因此

$$e^{a-1}+b\ln b+e^{b-1}+a\ln a\geq 2ab,\qquad a>0,\quad b>0.$$

且等号成立 $\Longleftrightarrow a=e^{b-1}, b=e^{a-1}\Longleftrightarrow a=e^{b-1}\geq b=e^{a-1}\geq a$ (见证法 1)$\Longleftrightarrow a=b=1$.

说明　事实上，在证法 5 中并没有必要引进 Legendre 变换，只需直接证明

$$a\ln a+e^{b-1}\geq ab,\qquad a>0,\quad b>0,$$

并探讨其中等号成立的条件即可.

然而，利用 Legendre 变换，可以 "造" 出一些 $xy\leq f(x)+f^*(y)$ 型的不等式.

例如，当 $f(X)=-\sin x$, $I=[0,\pi]$, $I^*=[-1,1]$ 时，可求得 f 的 Legendre 变换 f^* 为 $f^*(y)=\pi y-y\arccos y+\sqrt{1-y^2}$, 因而

$$\pi y-y\arccos y+\sqrt{1-y^2}-\sin x\geq xy,\ 0\leq x\leq\pi,\ -1\leq y\leq 1.$$

(亦可求得：等号成立 $\Longleftrightarrow x=\pi-\arccos y$.)

5.2.6　设 L 为 n 维线性空间，$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\},\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ 为 L 的两组基. 试证：存在 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\ldots,i_n$, 使得

$$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\beta_{i_j},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n\},\quad j=1,2,\ldots,n,$$

为 L 的 n 组基.

证　见 4.4 的证明.

第六届全国大学生数学夏令营试题解答

第一试

6.1.1 设 $f \in L^2(0,\pi)$, 证明：不能同时有

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{3}{4}, \quad \int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{3}{4}.$$

分析 所要证明不能同时成立的两个不等式是 3 个函数 $f(x), \sin x, \cos x$ 的两两之差的平方的积分中的两个．还有一个是 $\int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2 dx$, 它的值可具体算出．另一方面，

$$\begin{aligned}
|\sin x - \cos x|^2 = & \ |(\sin x - f(x)) - (f(x) - \cos x)|^2 \\
\le & \ (|f(x)-\sin x| + |f(x)-\cos x|)^2 \\
= & \ |f(x)-\sin x|^2 + |f(x)-\cos x|^2 \\
& +2|f(x)-\sin x|\cdot|f(x)-\cos x| \\
\le & \ 2|f(x)-\sin x|^2 + 2|f(x)-\cos x|^2,
\end{aligned}$$

这就把 3 个差的平方，即一个已知的和两个需要加以讨论的联系起来了．

证明 令 $I = \int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cdot\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \left(x + \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \pi.
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi |\sin x - \cos x|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^\pi (|f(x)-\sin x| + |f(x)-\cos x|)^2\,\mathrm{d}x \\
&\le 2\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

若题中所述两不等式同时成立，则有

$$\pi = I \le 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} = 3,$$

与显然的不等式 $\pi > 3$ 矛盾.

所以题中所述两不等式不能同时成立.

6.1.2 对 $x \in \mathbb{R}$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $\sin^{(n+1)}(x) = \sin(\sin^{(n)}(x))$, 其中 $\sin^{(1)} x = \sin x$. 试讨论 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)}(x)$ 的存在性，当有极限时试求之.

分析 $\{x_n \equiv \sin^{(n)} x\}$ 是由一系列递推关系式定义的数列. 这一数列的极限存在与否由递推关系式中出现的函数关系所决定. 在这里, 相邻的两个数之间的关系是 $x_{n+1} = \sin x_n$. 由正弦函数的性质知道, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $|\sin x| \le 1 < \pi/2$. 而在 $[0, \pi/2]$ 中 $\sin x$ 满足不等式 $0 \le \sin x \le x$, 并且等号仅当 $x = 0$ 时成立. 因此当 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $0 < \sin x$ 满足时，则 $x_n \in (0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, 且 $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是一严格单调减的有界数列; 当 $\sin x < 0$ 时, 由正弦函数是奇函数亦可得 $-1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < 0$. 当 $\sin x = 0$ 时，显然有 $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, 因而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. 至于在 $\sin x \ne 0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 是什么，可遵循由连续函数实现递推关系的一般情形中的处理方法:

设 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, 其中 f 是其定义域中的连续函数. 已知数列 $\{x_n\}$ 有极限 x_0. 则 x_0 必为函数 f 的不动点: $x_0 = f(x_0)$.

事实上，在关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 中令 $n \to +\infty$, 由 f 的连续性及 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 即得 $x_0 = f(x_0)$.

因而，$\{\sin^{(n)} x\}$ 的极限 x_0 必满足等式 $x_0 = \sin x_0$. 只有 $x_0 = 0$ 才满足这等式，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = 0$.

解 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = 0$.

对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 令 $x_n = \sin^{(n)} x$, $n = 1, 2, \ldots$. 由 $\sin^{(n)} x$ 的定义，有 $x_{n+1} = \sin^{(n+1)} x = \sin(\sin^{(n)} x) = \sin x_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

正弦函数 $\sin x$ 有如下性质:

$x \in (0, \pi/2)$ 时，有 $0 < \sin x < x$; $x \in (-\pi/2, 0)$ 时，有 $0 > \sin x > x$.

(1) 设 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x_1 = \sin x = 0$.

显然，此时有 $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(2) 设 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x_1 = \sin x > 0$.

显然，$x_1 \le 1 < \pi/2$. 所以 $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1$. 由归纳法易证 $0 < \cdots < x_n < \cdots < x_2 < x_1 \le 1$. 即 $\{x_n\}$ 是一个严格单调减的有界数列，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 存在，显然 $x_0 \in [0,1)$. 在关系式 $x_{n+1} = \sin x_n$ 中令 $n \to +\infty$, 由于正弦函数的连续性，得 $x_0 = \sin x_0$. 在 $[0,1)$ 中只有 $x_0 = 0$ 满足这一等式. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(3) 设 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x_1 = \sin x < 0$.

与情形 (2) 相仿，可得 $0 > \cdots > x_n > \cdots > x_2 > x_1 \ge -1$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ 存在，也有 $x_0 = \sin x_0$, 而在 $(-1,0]$ 中只有 $x_0 = 0$ 满足这一等式. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

综上所述，对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{(n)} x = 0$.

6.1.3 试证任一偶阶群中必有二阶元.

证明 设 G 为有限群，阶数为 $2^r n$, $(2, n\ A\#) = 1$. 由 "Sylow 定理：设 G 为有限群，阶数为 $p^r n$, $(p,n) = 1$, 其中 p 为素数，则 G 中必有 Sylow p- 群 H. 即 H 为 G 之子群，且 H 之阶为 p^r". 所以在 H 中任取一元 $a \ne e$, 则 a 之阶为 $2^t, t > 0$, 于是 $a^{2^{t-1}}$ 之阶为 2. 这证明了断言.

6.1.4 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上无限次可微的实值函数，且存在 $L > 0$, 使在 $\mathbb{R}$ 上对任意 $n \ge 0$ 有 $|f^{(n)}(x)| \le L$. 证明：如 $f \equiv 0$ 在一无限有界集 M 上成立，则 $f \equiv 0$.

分析 由条件 $|f^{(n)}(x)| \le L, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \ge 0$, 及 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 可以联想到 f 的带余项的 Taylor 展开式 (由于 f 还不知是解析的，因此不能用其 Taylor 级数), 即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的某一点，$\theta \in (0,1)$. 不难发现，对于 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\theta(x-x_0))(x-x_0)^n/n! = 0$. 因而，为了对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = 0$, 必须且只需找到一点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k \ge 0$.

由 Rolle 定理知，对一个 "好" 函数 $g(x)$, 如果 $a < b$, $g(a) = g(b) = 0$, 则存在 $c \in (a,b)$, 使 $g'(c) = 0$. 即，当 $g(x)$ 只有两个零点时，可能 $g'(x)$ 只有一个零点 (如函数 $g(x) = x^2 - 1$ 所示). 然而，Rolle 定理也告诉我们，当 $g(x)$ 有无穷多个

零点时，$g'(x)$ 的零点个数不会比 $g(x)$ 的少. 因而 $g''(x), g'''(x), \ldots, g^{(n)}(x), \ldots$ 亦如此. 此外，若 $g(x)$ 的无穷多个零点在 $[a,b]$ 中，则 $g^{(n)}(x)\,(n \in \mathbb{N})$ 在 $[a,b]$ 中也有无穷多个零点. 这样，通过不难的推理即可找到一点 $x_0 \in [a,b]$, 它为所有 $g^{(n)}(x)\,(n \geq 0)$ 的公共零点.

证明 由于 f 是连续函数, 故不妨设 M 是闭集, 即若 $x_n \in M$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, 则 $x_0 \in M$.

因为 M 是无限有界闭集，所以在 M 中存在序列 $\{x_n\}$ 和 x_0, 诸 x_n 互不相同，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. 从 $\{x_n\}$ 中不难选出单调的子序列 $\{x_n^{(0)}\}$, 则仍有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{(0)} = x_0$. 为了确定起见，不妨设

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \cdots < x_n^{(0)} < \cdots < x_0.$$

由集合 M 的定义知，$f(x_n^{(0)}) = f(x_0) = 0, n = 1, 2, \ldots$.

现证：对于任何 $k \in \mathbb{N}$, 存在以 x_0 为极限的单调增序列 $\{x_n^{(k)}\}$, 使得 $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

由 Rolle 定理，存在 $x_n^{(1)} \in (x_n^{(0)}, x_{n+1}^{(0)})$, 使得 $f'(x_n^{(1)}) = 0, n = 1, 2, \ldots$. 显然，由于 $\{x_n^{(0)}\}$ 是以 x_0 为极限的单调增序列，所以 $\{x_n^{(1)}\}$ 也具有这个性质.

现设 $\{x_n^{(k)}\}$ 是使得 $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0\,(\forall n \in \mathbb{N})$ 的以 x_0 为极限的单调增序列，则由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 所以由 Rolle 定理可得一以 x_0 为极限的单调增序列 $\{x_n^{(k+1)}\}$: $x_n^{(k+1)} \in (x_n^{(k)}, x_{n+1}^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots$, 使 $f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

这样，我们用归纳法证明了上面的论断.

对任何 $k \geq 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{(k)} = x_0$, $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$, 并且 $f^{(k)}$ 连续,

所以 $f^{(k)}(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$.

所以 $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

把函数 $f(x)$ 在 x_0 处展开成带余项的 Taylor 展开式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

这个展开式对任何 $x \in \mathbb{R}$, 任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，其中 $\theta \in (0,1)$, θ 依赖于 x 和

n. 因此，对 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n\right| \le \frac{L}{n!}|x-x_0|^n.$$

然而 $\lim\limits_{n\to+\infty} L|x-x_0|^n/n! = 0$, 所以 $f(x) = 0$. 由于 $x \in \mathbb{R}$ 是任意的，所以 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

说明 从证明可知，我们可以用 f 在一有界数列 $\{x_n\}$ 上为 0 来代替 $f|_M = 0$. 此外，条件 "$|f^{(n)}(x)| \le L, \forall n \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$" 可减弱为 "$|f^{(n)}(x)| \le L^n, \forall n \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$".

6.1.5 试证 $\mathbb{R}^2$ 上可数条直线不能充满整个平面. (给出不依赖于 Baire 纲定理的初等证明.)

分析 有时退一步想，问题倒显得简单明了. 在这里，可退一步这样想：这可数条直线甚至不能覆盖 $\mathbb{R}^2$ 中 (经过选择) 的一条直线，或者，不能覆盖 $\mathbb{R}^2$ 中任一圆周. 因而，当然不能覆盖整个 $\mathbb{R}^2$.

证法 1 记所给的可数条直线为 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$. 这可数条直线的方向数的集合至多是可数的，而平面 $\mathbb{R}^2$ 中所有直线的方向数的集合是不可数的 (方向数可用直线与某一确定的直线的夹角 θ 来表示，θ 充满了区间 $[0,\pi)$). 因而在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一条直线 L, 它与任何 L_n 都不平行，$n = 1, 2, \ldots$. 因而 $L \cap l_n$ 是单点集 $\{a_n\}$, 所以 $L \cap \{l_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ 至多可数，但直线 L 上的点集是不可数的.

所以 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有覆盖 L, 更没有覆盖 $\mathbb{R}^2$.

证法 2 任取一圆周 $C \subset \mathbb{R}^2$, 则 C 由不可数个点组成. $l_n \cap C$ 至多为两个点组成的集合，$n = 1, 2, \ldots$. 因此点集 $C \cap \{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 至多可数.

所以 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有覆盖 C, 更没有覆盖 $\mathbb{R}^2$.

说明 如果用与 Baire 纲定理有关的定理来证明本题，也很简捷：

设可数条直线的集合为 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$. 令 $V_n = \mathbb{R}^2 - l_n$, 则 V_n 是开集，且 $\overline{V_n} = \mathbb{R}^2$, 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ (见下面叙述的与 Baire 纲定理等价的定理). 故由 de Morgan 法则知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} {V_n}^c \neq \mathbb{R}^2$, 即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} l_n \neq \mathbb{R}^2$.

在上面的证明中，$\overline{V_n}$ 表示 V_n 的闭包，${V_n}^c$ 表示 V_n 的余集，即 ${V_n}^c = \mathbb{R}^2 - V_n = l_n$.

下面简单地介绍一下Baire纲定理及有关的基本定义.

定义. 设 S 是一个拓扑空间.

(1) $T \subset S$ 称为无处稠的，如果 $\overline{T}$ 不包含非空开集.

(2) $T \subset S$ 称为第 1 纲集，如果存在无处稠集 $T_n \subset S$, $n = 1, 2, \ldots$, 使得 $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$;

$T \subset S$ 称为第 2 纲集，如果 T 不是第 1 纲集.

Baire 纲定理. 完备距离空间是第 2 纲集.

定理. 设 S 是一个完备距离空间，开集 $V_n \subset S$, 且 $\overline{V_n} = S$, $n = 1, 2, \ldots$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$.

可以证明上述定理等价于 Baire 纲定理.

如果不直接利用这个定理，我们可以如下地证明本题:

证法 3 设所给的可数条直线为 $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$. 令 $V_n = \mathbb{R}^2 - l_n$, 则 V_n 为开集，且 $\overline{V_n} = \mathbb{R}^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

现证：存在闭球序列 $\{B_n = B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $B_n \subset W_n$, $n = 1, 2, \ldots$, 其中 $W_1 = V_1$, $W_n = \overset{\circ}{B}_{n-1} \cap V_n$, $n \geq 2$; $0 < r_{n+1} < r_n/2$, $n = 1, 2, \ldots$. 其中 $B_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - x_n| \leq r_n \right\}$, $\overset{\circ}{B}_n$ 是 B_n 的内点集.

事实上，因为 V_1 为非空开集，所以存在 $x_1 \in V_1$, $r_1 > 0$, 使得 $B_1 = B(x_1, r_1) \subset V_1$. 又因为 V_2 为开集，且 $\overline{V_2} = \mathbb{R}^2$, 所以 $W_2 = V_2 \cap \overset{\circ}{B}_1$ 为非空开集. 因此存在 $x_2 \in W_2$, $0 < r_2 < r_1/2$, 使 $B_2 \subset W_2$.

现设 $B_1, \ldots, B_n$ 已作出，满足 $B_n \subset W_n$, 且 $0 < r_{k+1} < r_k/2$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. 则如上述那样，可作 $B_{n+1} \subset W_{n+1}$, 且 $0 < r_{n+1} < r_n/2$.

因此，所述论断成立.

这样，$B_1 \subset V_1$, $B_n \subset V_n \cap \overset{\circ}{B}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, 并且 $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$, 而 $\mathbb{R}^2$ 是完备距离空间，所以存在 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, 即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$, 即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^c \neq \mathbb{R}^2$, 亦即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} l_n \neq \mathbb{R}^2$.

说明 证法 3 的证明实质上即为与 Baire 纲定理等价的那个定理的证明.

利用本题的结论和数学归纳法可以证明下述结论:

$\mathbb{R}^n$ 中可数个超平面不能充满 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

$\mathbb{R}^1$ 中的 "超平面" 即点，$\mathbb{R}^2$ 中的 "超平面" 即直线，$\mathbb{R}^3$ 中的 "超平面" 指平面.

事实上，本题的证法 1 即是利用 $n = 1$ 时的结论 (可数个点不能充满直线) 来证明 $n = 2$ 时的结论.

6.1.6 对 $n\times n$ 阶实矩阵 A, 定义 $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}A^k/(k!)$, $\operatorname{tr}(A)$ 为 A 的对角线元素之和. 试证: $\det\left(e^A\right)=e^{\operatorname{tr}(A)}$.

证明 注意条件 "实" 并不重要, 我们可以对复矩阵证明它. 对任意 $n\times n$ 非异复方阵 P, 显然

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(PAP^{-1})&=\operatorname{tr}(A),\\
e^{PAP^{-1}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}PA^kP^{-1}\\
&=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)P^{-1}=Pe^AP^{-1}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\det e^{PAP^{-1}}=\det Pe^AP^{-1}=\det e^A,\\
&e^{\operatorname{tr}(PAP^{-1})}=e^{\operatorname{tr}A}.
\end{aligned}
$$

所以为了证明 $\det e^A=e^{\operatorname{tr}A}$, 只要在 A 为 Jordan 标准形时证明此式即可.

今若 A 为准对角方阵

$$
A=\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_s)=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_s\end{pmatrix}.
$$

于是

$$
e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}A_1^k&&\\&\ddots&\\&&A_s^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{A_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{A_s}\end{pmatrix},
$$

因此

$$
\det e^A=\det(e^{A_1})\det(e^{A_2})\cdots\det(e^{A_s}).
$$

而

$$
\begin{aligned}
e^{\operatorname{tr}(A)}&=e^{\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_s))}=e^{\operatorname{tr}A_1+\cdots+\operatorname{tr}A_s}\\
&=e^{\operatorname{tr}A_1}e^{\operatorname{tr}A_2}\cdots e^{\operatorname{tr}A_s},
\end{aligned}
$$

所以如果

$$
\det e^{A_i}=e^{\operatorname{tr}A_i},\qquad 1\le i\le s,
$$

则有

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

因此，为了证明 $e^{\operatorname{tr}(A)} = \det(e^A)$，只要对每个 Jordan 块证明即可。

今对 $m \times m$ Jordan 块

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

有

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

于是

$$e^J = \sum_{k=0}^{\infty} 1k! J^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det e^J = (e^\lambda)^m = e^{m\lambda} = e^{(\operatorname{tr} J)}.$$

所以我们对 Jordan 块证明了断言．因此对任意 $n \times n$ 复方阵 A，有 $\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}$．

说明 1．这道题如果不用 Jordan 标准形证，那么用如下事实也可以：任意复方阵相似于上三角方阵，因此对角元素由所有本征值构成．

2．如果不用上面化为上三角方阵证，也可以用本征根来证．由于实方阵之本征值为复数．所以仍然要放到复数域上讨论．下面可以给出另一证明．事实上，设 A 为 $n \times n$ 复方阵，它的 n 个本征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$．我们要证明 e^A 的 n 个本征值为 $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$．如果已证，则由 $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$，有

$$\det e^A = e^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

而为了证明 e^A 之 n 个本征值恰为 $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$，仍要利用 Jordan 标准形．

第二试

6.2.1 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上实值连续函数. 若 $\mathbb{R}$ 上每一点均为 f 的相对极值点，求证：f 为常值函数.

分析 本题条件简明. 似乎无法从正面接近结论, 因此不妨试用反证法. 当应用反证法时，证明者又多了一些 (假设) 条件可加以利用.

可以想像, 把原题的条件与反证法的 (假设) 条件一起加以利用来进行推理时, 设法找到一点 (利用区间套原理？), 该点不是 f 的相对极值点，从而与已知条件矛盾；或者, 设法证明 f 在某点不连续, 或者 f 的值域未包含作为连续函数的 f 应该包含的区间，或者对函数 f 导出一个与连续函数的性质相矛盾的结论，从而 f 不是连续函数，与已知条件矛盾. 诸如此类.

总之，设法得到一个与已知条件，已知定理，或与假设条件，或与已推得的一些结论相矛盾的结论，则反证法的目的已达到.

证法 1 设 f 不是常值函数. 则存在 $a<b$, 使得 $f(a)\neq f(b)$. 为确定起见，不妨设 $f(a)<f(b)$.

下面我们证明：存在区间的无穷序列 $\left\{\left[x_0^{(n)},x_1^{(n)}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$, 满足

$$\left[x_0^{(n+1)},x_1^{(n+1)}\right]\subset\left(x_0^{(n)},x_1^{(n)}\right),$$
$$0<x_1^{(n+1)}-x_0^{(n+1)}<\left(x_1^{(n)}-x_0^{(n)}\right)/2,$$
$$f\left(x_0^{(n)}\right)<f(x)<f\left(x_1^{(n)}\right),\qquad\forall x\in\left(x_0^{(n)},x_1^{(n)}\right),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

事实上，令 $M=\max\limits_{[a,b]}f(x)$, $A=\{x\in[a,b]\mid f(x)=M\}$, $x_1^{(0)}=\inf\limits_{x\in A}x$. 由于 f 连续，所以 A 为闭集，因此 $x_1^{(0)}=\inf\limits_{x\in A}x=\min\limits_{x\in A}x$, 且 $f(x)<f\left(x_1^{(0)}\right)=M$, $\forall x\in\left[a,x_1^{(0)}\right)$.

令 $m=\min\limits_{\left[a,x_1^{(0)}\right]}f(x)$, $B=\left\{x\in\left[a,x_1^{(0)}\right]\ \middle|\ f(x)=m\right\}$, 则 B 为闭集. 令 $x_0^{(0)}=\max\limits_{x\in B}x$, 则 $x_0^{(0)}<x_1^{(0)}$, 且 $f\left(x_0^{(0)}\right)<f(x)<f\left(x_1^{(0)}\right)$, $\forall x\in\left(x_0^{(0)},x_1^{(0)}\right)$.

任取 $b_1\in\left(x_0^{(0)},x_1^{(0)}\right)$, 令 $M_1=\max\limits_{\left[x_0^{(0)},b_1\right]}f(x)$, $A_1=\left\{x\in\left[x_0^{(0)},b_1\right]\ \middle|\ f(x)=M_1\right\}$, $x_1^{(1)}=\min\limits_{x\in A_1}x$; 取 $a_1\in\left(x_0^{(0)},x_1^{(1)}\right)$, 使 $x_1^{(1)}-a_1<\left(x_1^{(0)}-x_0^{(0)}\right)/2$. 令 $m_1=\min\limits_{\left[a_1,x_1^{(1)}\right]}f(x)$, $B_1=\left\{x\in\left[a_1,x_1^{(1)}\right]\ \middle|\ f(x)=m_1\right\}$, $x_0^{(1)}=\max\limits_{x\in B_1}x$. 则 $x_0^{(0)}<x_0^{(1)}<x_1^{(1)}<x_1^{(0)}$, $x_1^{(1)}-x_0^{(1)}\leq x_1^{(1)}-a_1<\left(x_1^{(0)}-x_0^{(0)}\right)/2$, $f\left(x_0^{(0)}\right)<$

$f(x_0^{(1)}) < f(x) < f(x_1^{(1)}) < f(x_1^{(0)}), \forall x \in (x_0^{(1)}, x_1^{(1)})$.

现设 $[x_0^{(0)}, x_1^{(0)}], [x_0^{(1)}, x_1^{(1)}], \dots, [x_0^{(n)}, x_1^{(n)}]$ 已作出，满足

$$x_0^{(0)} < x_0^{(1)} < \cdots < x_n^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_1^{(1)} < x_1^{(0)},$$
$$x_1^{(k+1)} - x_0^{(k+1)} < (x_1^{(k)} - x_0^{(k)})/2, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$
$$f(x_0^{(k)}) < f(x) < f(x_1^{(k)}), \qquad \forall x \in (x_0^{(k)}, x_1^{(k)}), \quad k = 0, \dots, n.$$

类似于如上所述，可作 $[x_0^{(n+1)}, x_1^{(n+1)}] \subset (x_0^{(n)}, x_1^{(n)})$, 满足 $0 < x_1^{(n+1)} - x_0^{(n+1)} < (x_1^{(n)} - x_0^{(n)})/2$, $f(x_0^{(n+1)}) < f(x) < f(x_1^{(n+1)}), \forall x \in (x_0^{(n+1)}, x_1^{(n+1)})$.

这样，我们用数学归纳法证明了论断.

由区间套原理知, 存在唯一的 $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [x_0^{(n)}, x_1^{(n)}]$. 由于 $[x_0^{(n+1)}, x_1^{(n+1)}] \subset (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}), n = 0, 1, 2, \dots$, 因此 $x_0^{(n)} < y < x_1^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$. 所以 $f(x_0^{(n)}) < f(y) < f(x_1^{(n)}), n = 0, 1, 2, \dots$. 由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_0^{(n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} x_1^{(n)} = y$, 所以 y 不是 f 的相对极值点. 这与已知条件 "$\mathbb{R}$ 上每一点均为 f 的相对极值点" 矛盾. 所以函数 f 应为常值函数.

另一方面， $\mathbb{R}$ 上的常值函数显然为在每一点处均取相对极值的连续函数.

因此， f 确是常值函数.

证法 2 设 f 不是常值函数. 则存在 $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_0^{(0)} < x_1^{(0)}, f(x_0^{(0)}) \neq f(x_1^{(0)})$. 为确定起见，不妨设 $f(x_0^{(0)}) < f(x_1^{(0)})$.

下证：存在区间的无穷序列 $\{[x_0^{(n)}, x_1^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$, 满足

$$x_0^{(0)} < x_0^{(1)} < \cdots < x_0^{(n)} < \cdots < x_1^{(n)} < \cdots < x_1^{(1)} < x_1^{(0)},$$
$$x_1^{(n+1)} - x_0^{(n+1)} < (x_1^{(n)} - x_0^{(n)})/2, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$f(x_0^{(0)}) < f(x_0^{(1)}) < \cdots < f(x_0^{(n)}) < \cdots < f(x_1^{(n)}) < \cdots < f(x_1^{(1)}) < f(x_1^{(0)}).$$

事实上，由连续函数的中值定理 (Bolzano-Cauchy 定理) 知，存在 $u \in (x_0^{(0)}, x_1^{(0)})$, 使得 $f(u) = [f(x_0^{(0)}) + f(x_1^{(0)})]$. 则 $f(x_0^{(0)}) < f(u) < f(x_1^{(0)})$. 若 $x_1^{(0)} - u \le u - x_0^{(0)}$, 则存在 $v \in (u, x_1^{(0)})$, 使得 $f(v) = [f(u) + f(x_1^{(0)})]/2$. 则 $f(x_0^{(0)}) < f(u) < f(v) < f(x_1^{(0)})$, 且 $0 < v - u < x_1^{(0)} - u \le (x_1^{(0)} - x_0^{(0)})/2$. 此时令 $x_0^{(1)} = u, x_1^{(1)} = v$. 若 $x_1^{(0)} - u > u - x_0^{(0)}$, 则存在 $v \in (x_0^{(0)}, u)$, 使得 $f(v) = [f(x_0^{(0)}) + f(u)]/2$. 则 $f(x_0^{(0)}) < f(v) < f(u) < f(x_1^{(0)})$, 且 $0 < u - v < u - x_0^{(0)} < (x_1^{(0)} - x_0^{(0)})/2$. 此时令 $x_0^{(1)} = v, x_1^{(1)} = u$.

总之，可取 $[x_0^{(1)}, x_1^{(1)}] \subset (x_0^{(0)}, x_1^{(0)})$, 满足 $0 < x_1^{(1)} - x_0^{(1)} < (x_1^{(0)} - x_0^{(0)})/2$, $f(x_0^{(0)}) < f(x_0^{(1)}) < f(x_1^{(1)}) < f(x_1^{(0)})$.

现设满足条件的前 n 个闭区间 $\{[x_0^{(k)},x_1^{(k)}]\}_{k=1}^{n}$ 已作出，则可用与上述方法相似的方法在 $(x_0^{(n)},x_1^{(n)})$ 中取出 $x_0^{(n+1)},x_1^{(n+1)}$，满足

$$0<x_1^{(n+1)}-x_0^{(n+1)}<(x_1^{(n)}-x_0^{(n)})/2,$$
$$f(x_0^{(n)})<f(x_0^{(n+1)})<f(x_1^{(n+1)})<f(x_1^{(n)}).$$

这样即用数学归纳法证明了论断.

因而，由区间套 $\{[x_0^{(n)},x_1^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$ 的性质知，存在唯一的 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_0^{(n)},x_1^{(n)}]$，即 $y=\lim\limits_{n\to+\infty}x_0^{(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}x_1^{(n)}$，亦有 $x_0^{(n)}<y<x_1^{(n)}$，$n=1,2,\ldots$. 由函数 f 的连续性知，$f(y)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0^{(n)})=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_1^{(n)})$. 由于 $[f(x_0^{(n+1)}),f(x_1^{(n+1)})]\subset(f(x_0^{(n)}),f(x_1^{(n)}))$，$n=1,2,\ldots$，所以 $f(x_0^{(n)})<f(y)<f(x_1^{(n)})$，$n=1,2,\ldots$.

这表明 y 不是 f 的相对极值点. 这与函数 f 的已知条件矛盾. 所以函数 f 应为常值函数.

另一方面，$\mathbb{R}$ 上的常值函数显然为在每一点处均取相对极值的连续函数.

因此，f 确为常值函数.

证法 3 设 f 不是常值函数. 则存在 a,b, $a<b$, $f(a)\neq f(b)$. 为确定起见，不妨设 $f(a)<f(b)$. 因为 f 连续，所以 $[f(a),f(b)]\subset R(f)$.

现证：存在 $c\in(f(a),f(b))$，使集合 $F_c=\{x\in[a,b]\mid f(x)=c\}$ 不包含区间.

事实上，若对 $\forall c\in(f(a),f(b))$，集合 F_c 都含有区间，取一区间 $I_c\subset F_c$，则 $\bigcup_c I_c\subset[a,b]$，其中 c 跑遍 $(f(a),f(b))$. 显然，$c\neq d$ 时 $I_c\cap I_d=\emptyset$. 因此 $[a,b]$ 中包含了不可数个互不相交的区间，而这是不可能的 (从每一 I_c 中任取一有理数，可知 $\{I_c\mid c\in(f(a),f(b))\}$ 至多可数). 因此论断成立.

为叙述方便，不妨设 $c=0$，即 $F_0=\{x\in[a,b]\mid f(x)=0\}$ 中不包含区间，而 $f(a)<0<f(b)$.

因为 f 连续，所以集合 F_0 为有界闭集.

显然，F_0 不是单点集. 否则，设 $F_0=\{x_0\}$，则 $x\in[a,x_0)$ 时 $f(x)<0$，$x\in(x_0,b]$ 时 $f(x)>0$. 因此 x_0 不是 f 的相对极值点，与题设条件矛盾.

因此，若令 $y_0=\min\{x\mid x\in F_0\}$，$y_1=\max\{x\mid x\in F_0\}$，则 $a<y_0<y_1<b$；$x\in[a,y_0)$ 时 $f(x)<0$，$x\in(y_1,b]$ 时 $f(x)>0$. 并且，$G=[y_0,y_1]-F_0$ 是一个开集，所以存在开区间 G_i，$i\in I$，I 为有限集或为可

列集，$i \neq j$ 时，$G_i \cap G_j = \emptyset$，使得 $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. 并且，如果 G_i, G_j 是两个相邻的开区间 (即在 G_i, G_j 之间没有 G 中别的区间) 则 $\overline{G_i} \cap \overline{G_j}$ 是单点集 (否则 $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$，因而 F_0 中含有区间). 对 $\forall i \in I$，或者 $f(x) > 0, \forall x \in G_i$；或者 $f(x) < 0, \forall x \in G_i$.

由于 $\mathbb{R}$ 的任何点都是 f 的相对极值点，所以对 $\forall x \in F_0$，存在开区间 $V(x) \ni x$，使得 f 在 $V(x)$ 中同号 (即 f 在 $V(x)$ 中非正，或者在 $V(x)$ 中非负). 由于 F_0 中不包含区间，所以不妨设 $V(x)$ 的端点属于 G. 显然，$F_0 \subset \bigcup_{x \in F_0} V(x)$. 因为 F_0 有界闭，由 Heine-Borel-Lebesgue 定理，存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F_0$，使 $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$.

若 $i \neq j, V(x_i) \cap V(x_j) \neq \emptyset$，则 $V_{ij} = V(x_i) \cap V(x_j)$ 为一开区间. f 在 $V(x_i)$ 中与在 $V(x_j)$ 中必同号. 事实上，若在 $V(x_i)$ 中 $f \geq 0$，在 $V(x_j)$ 中 $f \leq 0$，则在 V_{ij} 中 $f = 0$. 所以 $V_{ij} \subset F_0$. 这与 F_0 不包含区间矛盾.

因此，可设 $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_n)$ 互不相交，且不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

由于 $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$，所以对于 $i = 1, 2, \ldots, n-1$，$V(x_i)$ 的右端点与 $V(x_{i+1})$ 的左端点在同一个区间 G_j 中 (j 与 i 有关)，因此 f 在 $V(x_i), V(x_{i+1})$ 和 G_j 中符号相同. 这样，f 在所有的 $V(x_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ 中的符号皆相同.

因为 $x \in [a, y_0)$ 时 $f(x) < 0$，$y_0 \in V(x_1)$，所以在 $V(x_1)$ 中 $f \leq 0$；

因为 $x \in (y_1, b]$ 时 $f(x) > 0$，$y_1 \in V(x_n)$，所以在 $V(x_n)$ 中 $f \geq 0$. 因此在所有 $V(x_i)$ 中 $f \equiv 0$. 即 F_0 包含有区间. 这与关于 F_0 的假设矛盾.

所以函数 f 应为常值函数.

另一方面，$\mathbb{R}$ 上的常值函数显然为在每一点均取相对极值的连续函数.

因此，f 确为常值函数.

证法 4 前一部分与证法 3 相同. 设 $f(a) < 0 < f(b)$，$F_0 = \left\{ x \in [a, b] \;\middle|\; f(x) = 0 \right\}$ 不包含区间.

令 $P = \left\{ x \in [a, b] \;\middle|\; \text{对任何 } u \in [x, b], \text{有 } f(u) \geq 0 \right\}$. 因为 $b \in P$，所以 $P \neq \emptyset$. 此外，P 是闭集. 事实上，若 $x_n \in P$，$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$，则 $f(x_n) \geq 0$，且 f 连续，所以 $f(x_0) \geq 0$；对 $\forall u \in (x_0, b]$，由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$，所以存在 $x_n < u$，但 $x_n \in P$，所以 $f(u) \geq 0$. 因此 $x_0 \in P$.

现令 $y = \min\limits_{x \in P} x$. 则 $a < y < b$. 由于 F_0 不含有区间，因此由 y 及 P 的定义知，对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$，满足 $x_1 < y < x_2$，$y - x_1 <$

ε, $x_2 - y < \varepsilon$, 且 $f(x_1) < 0 = f(y) < f(x_2)$. 因此 y 不是 f 的相对极值点. 这与已知条件矛盾. 所以 f 应为常值函数.

另一方面, $\mathbb{R}$ 上的常值函数显然为在每一点处均取相对极值的连续函数.

因此, f 确是常值函数.

证法 5 先证一引理:

$\mathbb{R}$ 上的任何非常数实值函数的相对极值集合至多是可数的.

设 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个非常数实值函数, 它的相对极大值集合和相对极小值集合分别记为 M 和 m. 只需证明 M 和 m 都是至多可数集即可.

设 y 是 g 的一个相对极大值, 即 $y \in M$. 则存在 x, 使 $g(x) = y$, 以及 x 的一个邻域 G_y, 当 $u \in G_y$ 时 $g(u) \le y$. 我们把 G_y 取为其两个端点都是有理数的开区间. 这样, 我们构造了一个从 M 到 $\mathcal{I}$ 的映射 F, 其中 $\mathcal{I}$ 为所有以有理数为其两个端点的开区间的集合.

映射 F 是单射, 即若 $y_1, y_2 \in M$, $y_1 \ne y_2$, 则 $G_{y_1} \ne G_{y_2}$. 事实上, 不妨设 $y_1 < y_2$, $x_1 \in G_{y_1}$, $x_2 \in G_{y_2}$, 使 $g(x_1) = y_1$, $g(x_2) = y_2$. 由于在 G_{y_1} 中 $g \le g(x_1) = y_1 < y_2$, 所以 $G_{y_1} \ne G_{y_2}$.

这样, 由于 $\mathcal{I}$ 是可数集, 所以 M 是至多可数集. 同样可证 m 是至多可数集. 引理证毕.

现设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数, $\mathbb{R}$ 上的每一点都是 f 的相对极值点. 因而 f 的值域 $R(f)$ 中的任一值都是 f 的相对极值. 若 f 不是常值函数, 则 $R(f)$ 必含有区间, 因而是不可数的, 这与引理矛盾. 所以 f 应为常值函数.

另一方面, $\mathbb{R}$ 上的常值函数显然为在每一点处均取相对极值的连续函数.

因此, f 确是常值函数.

说明 1. 本题中把 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, 结论仍成立, 即:

若 $\mathbb{R}^n$ 上的每一点均为实值连续函数 f 的相对极值点, 则 f 为常值函数.

事实上, 当作了反证法假设 "存在 $P, Q \in \mathbb{R}^n$, 使 $f(P) \ne f(Q)$" 后, 我们就可在连结 P, Q 的一维直线段上讨论问题了.

2. 存在每一点都是相对极值点的非连续函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \ne 0, \end{cases}$$

或者, 阶梯函数: $f(x) = n$, $n \le x < n + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3. 存在几乎每一点都是相对极值点的非常值的连续函数.

例如，函数 $K(x)=\Phi(x-n)+n$, 若 $x\in[n,n+1], n\in\mathbb{Z}$, 其中 $\Phi(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数，它的定义如下.

设 C 为区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 三分集，即

$$C=[0,1]-G=[0,1]-\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left[\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\right]\cup\cdots\right\}.$$

任意 $x\in C$ 可表示为 $x=2\sum_{i=1}^{\infty}a_i/3^i, a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\ldots$. 当 $x=2\sum_{i=1}^{\infty}a_i/3^i\,(a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\ldots)$ 时，定义 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i/2^i$. 则 φ 显然是 C 上的严格单调增函数，且由 $[0,1]$ 中的数的二进制表示知 $\varphi(C)=[0,1]$.

定义 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数 Φ:

$$\Phi(x)=\sup\{\varphi(y)\ \mid\ y\in C, y\le x\},\quad \forall x\in[0,1].$$

这样，Φ 是 $[0,1]$ 上的单调非减函数，$\Phi([0,1])=[0,1]$, 所以 Φ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 在 C 上 Φ 与 φ 相等，在 $G=(1/3,2/3)\cup[(1/9,2/9)\cup(7/9,8/9)]\cup\cdots$ 的每一个开区间上 Φ 是常数. 因而 G 中每一点均为 Φ 的相对极值点. 由于 $\operatorname{meas}G=1$ ($\operatorname{meas}G$ 是 G 的 Lebesgue 测度), 所以在 $[0,1]$ 上 Cantor 函数几乎处处取相对极值.

这样，开始时定义的函数 $K(x)$ 即为 $\mathbb{R}$ 上的非常值的连续函数，它在集合 $U=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}\{G+n\}$ 的每一开区间上为常数，其中 $\{G+n\}=\{y\in\mathbb{R}\ \mid\ y-n\in G\}$. 由于 $\operatorname{meas}(\mathbb{R}-U)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{meas}\{C+n\}=0$, 因此 $\mathbb{R}$ 上几乎所有的点都为函数 K 的相对极值点.

6.2.2 设 N,k 为正整数，$N>k$, $f(\xi)=\sum_{n=0}^{N}C_ne^{in\xi}$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$. 证明：$f(\xi)$ 被 $1+e^{i\xi}+\cdots+e^{i(k-1)\xi}$ 整除的充分必要条件是

$$\sum_n C_{nk}=\sum_n C_{nk+1}=\sum_n C_{nk+2}=\cdots=\sum_n C_{nk+k-1}.$$

证明 作复多项式

$$F(z)=\sum_0^N C_nz^n,\qquad G(z)=\sum_0^{k-1}z^n.$$

于是上述问题为当 $z=e^{i\xi}, \forall\xi\in R$ 时 $F(z)$ 被 $G(z)$ 整除. 由题意可知，整除之意思为存在复多项式

$$H(z)=\sum_0^l b_nz^n,$$

使得 $F(z)=G(z)H(z)$ 在 $z=e^{i\xi}\ (\forall\xi\in R)$ 处成立. 由于集合 $\{z=e^{i\xi}\mid\forall\xi\in R\}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 即为单位圆周, 所以我们知 $F(z)-G(z)H(z)$ 在单位圆周上恒为零. 由全纯函数之性质可知 $F(z)=G(z)H(z)$ 在单位圆内成立. 由于它们都是多项式, 因此 $F(z)=G(z)H(z)$ 在全平面成立. 所以问题化为求 $G(z)|F(z)$ 之充要条件.

令 $N>k$, 故我们可以在 $F(z)$ 上加 $C_{N+1}z^{N+1}, C_{N+2}z^{N+2},\ldots$, 使得 $sk-2\geq N$, 即

$$F(z)=\sum_{n=0}^{sk-2}C_nz^n,$$

其中约定当 $i\notin\{0,1,\ldots,N\}$ 时成立 $C_i=0$. 记

$$F_0(z)=(z-1)F(z)=\sum_{n=0}^{sk-1}a_nz^n,$$

于是

$$a_0=-C_0,\quad a_1=C_0-C_1,\cdots,$$

$$a_{sk-2}=C_{sk-3}-C_{sk-2},\quad a_{sk-1}=C_{sk-2}.$$

记

$$G_0(z)=(z-1)G(z)=z^k-1,$$

则由 $G_0(z)$ 恰有 k 个不同的根即可知 $G(z)|F(z)$ 当且仅当 $G_0(z)|F_0(z)$. 因为

$$\begin{aligned}F_0(z)=\ &a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k\\&+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots+a_{2k-1}z^{2k-1}+\cdots\\&+a_{(s-1)k}z^{(s-1)k}+a_{(s-1)k+1}z^{(s-1)k+1}+\cdots+a_{sk-1}z^{sk-1},\end{aligned}$$

因此 $(z^k-1)|F_0(z)$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&a_0+a_k+\cdots+a_{(s-1)k}=0,\\&a_1+a_{k+1}+\cdots+a_{(s-1)k+1}=0,\\&\vdots\\&a_{k-1}+a_{2k-1}+\cdots+a_{sk-1}=0.\end{aligned}$$

这证明了充要条件为

$$\sum_{n=0}^{s-1} a_{nk+i} = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

由于 $C_{-1} = C_{sk-1} = 0$, 故

$$a_0 = C_{-1} - C_0, \quad a_1 = C_0 - C_1, \cdots,$$

$$a_{sk-2} = C_{sk-3} - C_{sk-2}, \quad a_{sk-1} = C_{sk-2} - C_{sk-1},$$

即

$$a_i = C_{i-1} - C_i, \qquad \forall i \in \mathbb{Z},$$

代入有

$$\sum_{n=0}^{s-1} (C_{nk+i-1} - C_{nk+i}) = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

即有

$$\sum_{n=0}^{s-1} C_{nk-1} = \sum_{n=0}^{s-1} C_{nk} = \cdots = \sum_{n=0}^{s-1} C_{nk+k-1}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{s-1} C_{nk-1} &= C_{-1} + C_{k-1} + \cdots + C_{(s-1)k-1} \\ &= C_{k-1} + \cdots + C_{(s-1)k-1} + C_{sk-1} = \sum_{n=0}^{s-1} C_{nk+k-1},\end{aligned}$$

所以证明了充要条件为

$$\sum_{n=0}^{s-1} C_{nk} = \sum_{n=0}^{s-1} C_{nk+1} = \cdots = \sum_{n=0}^{s-1} C_{nk+k-1}.$$

6.2.3 设 f 为整函数, ω_1, ω_2 为比例不为实数的两个非零复数, 且有常数 a, b 使得 $f(z+\omega_1) = af(z)$, $f(z+\omega_2) = bf(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

证明: $f(z) = Ae^{Bz}$, 其中 A, B 均为常数.

分析 显然, 当 $ab = 0$ 时 $f \equiv 0$. 此时可取 $A = 0$ (B 可任意), 则结论即真.

当 $ab \neq 0$ 时, 我们不妨从结论向前倒推, 看看常数 A, B 应满足什么条件. 有

$$f(z) = Ae^{Bz} \iff f(z)/e^{Bz} = A.$$

因为 f 是整函数，所以 $f(z)/e^{Bz}$ 也是整函数．由 Liouville 定理，一个整函数等于常数，充要条件为其模在 $\mathbb{C}$ 上有界 (此条件似乎比它为常数 "弱")．

由题设条件 $f(z+\omega_1)=af(z)$, $f(z+\omega_2)=bf(z)$ 及 $\omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}$, 容易想到在下述意义下 f"几乎" 为一个双周期函数：

$$f(z+m\omega_1+n\omega_2)=a^m b^n f(Z),\qquad \forall z\in\mathbb{C},\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

因此，若 $|a|=|b|=1$, 则 $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ 即为 $|f(z)|$ 在一个平行四边形 $\overline{\Omega}=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; z=r\omega_1+s\omega_2,\,0\le r\le 1,\,0\le s\le 1\right\}$ 上的最大值，因而 $|f(z)|$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界．反之，$|f(z)|$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界，必须 $|a|=|b|=1$. 此时，$f(z)\equiv f(0)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, 即相应于 $A=f(0)$, $B=0$ 的情形．

一般而言，$|a|\neq 1$, $|b|\neq 1$. 我们要证明的结论比 $f(z)\equiv A$ 弱，然而又是它的一种推广．

由于 e^{Bz} 是指数函数，所以 $F(z)=f(z)/e^{Bz}$ 也 "几乎" 是一个双周期函数：

$$F(z+m\omega_1+n\omega_2)=\frac{a^m b^n}{e^{Bm\omega_1}\cdot e^{Bn\omega_2}}F(z),\qquad \forall z\in\mathbb{C},\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

由上面的分析可知，$F(z)\equiv A \Longleftrightarrow |F(z)|$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界 $\Longleftrightarrow |a^m b^n/e^{Bm\omega_1}e^{Bn\omega_2}| =1, \forall m,n\in\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \left|a/e^{B\omega_1}\right|=\left|b/e^{B\omega_2}\right|=1$. 当最后的条件满足时，即有 $F(z)\equiv F(0)=f(0)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, 即 $f(z)=f(0)\cdot e^{Bz}$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 因此，可由 (或者，应该由) $|e^{B\omega_1}|=|a|$, $|e^{B\omega_2}|=|b|$ 来确定常数 B.

证明　若 a,b 中至少有一个为 0, 则显然 $f\equiv 0$. 取 $A=B=0$, 结论即真．

现设 $ab\neq 0$, 即 $a\neq 0, b\neq 0$. 易证：

$$f(z+m\omega_1)=a^m f(z),\qquad f(z+n\omega_2)=b^n f(z),$$
$$\forall z\in\mathbb{C},\ m,n\in\mathbb{Z}.$$

事实上，$m=1$ 时的第 1 个等式即为题设条件之一．现设对于 $m\in\mathbb{N}$, 有 $f(z+m\omega_1)=a^m f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 则 $f(z+(m+1)\omega_1)=f(z+\omega_1+m\omega_1)=a^m f(z+\omega_1)=a^{m+1}f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 因此第 1 个等式对于 $\forall z\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$ 成立．

对任意固定的 $m\in\mathbb{N}$, 令 $w=z+m\omega_1$, 则有 $z=w-m\omega_1$. 当 z 遍历 $\mathbb{C}$ 时，w 也遍历 $\mathbb{C}$. 因为 $f(w)=f(z+m\omega_1)=a^m f(z)=a^m f(w-m\omega_1)$, 所以 $f(w-m\omega_1)=a^{-m}f(w)$, $\forall w\in\mathbb{C}$. 即第 1 个等式对于 $\forall z\in\mathbb{C}$, $-m\in\mathbb{N}$ 成立．

而当 $m=0$ 时，第 1 个等式是平凡的：$f(z)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

所以第 1 个等式对于 $\forall z \in \mathbb{C}, \forall m \in \mathbb{Z}$ 成立.

同样可证明第 2 个等式.

从这两个等式容易得到

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = a^m b^n f(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

事实上,

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = b^n f(z + m\omega_1) = a^m b^n f(z),$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

记 $\omega_1 = c + di, \omega_2 = p + qi, B = B_1 + B_2 i; c, d, p, q, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$. 令 $|e^{B\omega_1}| = |a|, |e^{B\omega_2}| = |b|$, 这等价于方程组

$$\begin{cases} cB_1 - dB_2 = \ln|a|, \\ pB_1 - qB_2 = \ln|b|, \end{cases}$$

其中 $\ln|a|, \ln|b|$ 取实值.

由于 $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, 所以行列式 $D = \begin{vmatrix} c & -d \\ p & -q \end{vmatrix} \neq 0$. 因此上述线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} B_1 = (d\ln|b| - q\ln|a|)/D, \\ B_2 = (c\ln|b| - p\ln|a|)/D. \end{cases}$$

即有唯一的常数 $B = B_1 + B_2 i$, 使 $|e^{B\omega_1}| = |a|, |e^{B\omega_2}| = |b|$.

令 $F(z) = f(z)/e^{Bz}, \forall z \in \mathbb{C}$, B 由上述确定. 由于 f 是整函数, 所以 F 也是整函数. 并且,

$$\begin{aligned} |F(z + m\omega_1 + n\omega_2)| &= |f(z + m\omega_1 + n\omega_2)|/|e^{B(z+m\omega_1+n\omega_2)}| \\ &= |a^m b^n f(z)|/|e^{Bm\omega_1} \cdot e^{Bn\omega_2} \cdot e^{Bz}| \\ &= \left|\left(\frac{a}{e^{B\omega_1}}\right)^m\right| \cdot \left|\left(\frac{b}{e^{B\omega_2}}\right)^n\right| \cdot \left|\frac{f(z)}{e^{Bz}}\right| \\ &= |f(z)/e^{Bz}| = |F(z)|, \end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

令 $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = r\omega_1 + s\omega_2, 0 \le r < 1, 0 \le s < 1 \right\}$, 则 $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$ 为有界闭集 (平行四边形).

现证：对 $\forall z\in\mathbb{C}$, 存在 $m,n\in\mathbb{Z}$ 及 $z'\in\Omega$, 使得

$$z=z'+m\omega_1+n\omega_2.$$

事实上，若记 $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, 令 $C_1(z)=(py-qx)/D$, $C_2(z)=(dx-cy)/D$, 则有 $C_1(z)\in\mathbb{R}$, $C_2(z)\in\mathbb{R}$, $z=C_1(z)\omega_1+C_2(z)\omega_2$. 令 $m=[C_1(z)]$, $n=[C_2(z)]$ ($[u]$ 表示实数 u 的整数部分), $C_1'=C_1(z)-m$, $C_2'=C_2(z)-n$, $z'=z-m\omega_1-n\omega_2$, 则 $m,n\in\mathbb{Z}$, $0\le C_1'<1$, $0\le C_2'<1$, $z'=C_1'\omega_1+C_2'\omega_2\in\Omega$. 因此 $z=z'+m\omega_1+n\omega_2$ 具有所述的性质．显然，当 z 遍历 $\mathbb{C}$ 时，z' 遍历 Ω.

这样，$|F(z)|=|F(z'+m\omega_1+n\omega_2)|=|F(z')|$.

所以 $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|F(z)|=\sup\limits_{z'\in\Omega}|F(z')|=\max\limits_{z'\in\overline{\Omega}}|F(z')|<+\infty$.

由 Liouville 定理，整函数 $F(z)$ 恒等于一常数，所以 $F(z)\equiv F(0)=f(0)$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 取 $A=f(0)$, 则有

$$f(z)=Ae^{Bz},\qquad \forall z\in\mathbb{C}.$$

6.2.4　试证：两个 2×2 复矩阵 A 和 B 酉等价的充要条件为

$$\begin{cases}\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B,\\ \operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}B^2,\\ \operatorname{tr}A^*A=\operatorname{tr}B^*B,\end{cases}$$

这里 $A^*=(\overline{A})'$ 为 A 的共轭转置矩阵，$\operatorname{tr}A$ 为 A 的对角线元素之和．又，两个 $n\times n$ 复矩阵 A 和 B 称为酉等价，如果存在一个 $n\times n$ 酉矩阵 U, 使得 $B=U^*AU$.

证明　若 A 和 B 酉等价，即 $B=U^*AU$．已知 U 为酉方阵，所以 $UU^*=U^*U=I$. 于是 $B=U^{-1}AU$. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}B&=\operatorname{tr}U^{-1}AU=\operatorname{tr}A\\ \operatorname{tr}B^2&=\operatorname{tr}(U^{-1}AU)^2=\operatorname{tr}(U^{-1}A^2U)=\operatorname{tr}A^2\\ \operatorname{tr}B^*B&=\operatorname{tr}(U^*AU)^*(U^*AU)=\operatorname{tr}(U^*A^*U)(U^*AU)\\ &=\operatorname{tr}U^{-1}A^*AU=\operatorname{tr}A^*A.\end{aligned}$$

反之，设 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$, $\operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}B^2$, $\operatorname{tr}A^*A=\operatorname{tr}B^*B$. 我们知道任一复方

阵可酉相似于上三角方阵，所以在酉等价意义下我们无妨假设

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

因此条件为

$$x + z = \lambda + \nu,$$

$$x^2 + z^2 = \lambda^2 + \nu^2,$$

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\nu|^2.$$

视 λ, μ, ν 已知，来解出 x, y, z 如下.

由 $x + z = \lambda + \nu$ 有 $x^2 + 2xz + z^2 = \lambda^2 + 2\lambda\nu + \nu^2$, 所以有 $xz = \lambda\nu$. 因此 x, z 为二次多项式

$$X^2 - (\lambda + \nu)X + \lambda\nu = (X - \lambda)(X - \nu)$$

之根. 所以有两组解：

$$\begin{cases} x = \lambda \\ z = \nu \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x = \nu \\ z = \lambda, \end{cases}$$

它们都是 $x^2 + z^2 = \lambda^2 + \nu^2, x + z = \lambda + \nu$ 之解. 以此分别代入第 3 式，总有 $|y|^2 = |\mu|^2$. 这证明了

$$y = \mu e^{i\theta},$$

其中 $0 \le \theta < 2\pi$. 所以

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} \nu & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

显然当 $\lambda = \nu$ 时后一情形变为前一情形. 在前一情形有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \lambda & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$

这证明了 $\begin{pmatrix} \lambda & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ 酉等价，即 A 和 B 酉等价. 在后一情形，且 $\lambda \neq \nu, \mu = 0$, 则由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

可知 A 和 B 也酉等价. 若 $\mu \neq 0, \lambda \neq \nu$, 我们要求二阶酉方阵

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

使得 $U^* \begin{pmatrix} \nu & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix} \nu & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$

此即

$$\begin{cases} \nu\alpha + \mu e^{i\theta}\gamma = \lambda\alpha, & (1) \\ \mu e^{i\theta}\delta = \mu\alpha, & (2) \\ \lambda\delta = \nu\delta + \mu\gamma. & (3) \end{cases}$$

于是由 (2), (3) 有

$$\alpha = e^{i\theta}\delta, \qquad \gamma = \mu^{-1}(\lambda - \nu)\delta,$$

代入 (1), 可知 (1) 为恒等式. 因此所求之酉方阵必须为

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta}\delta & \beta \\ \mu^{-1}(\lambda - \nu)\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

今 $UU^* = I$, 即有

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}\delta & \beta \\ \mu^{-1}(\lambda - \nu)\delta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta}\overline{\delta} & \overline{\mu}^{-1}(\overline{\lambda} - \overline{\nu})\overline{\delta} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

这证明了 β 及 δ 必须适合条件

$$|\delta|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

$$e^{i\theta}\overline{\mu}^{-1}(\overline{\lambda} - \overline{\nu})|\delta|^2 + \beta\overline{\delta} = 0,$$

$$(1 + |\mu|^{-2}|\lambda - \nu|^2)|\delta|^2 = 1.$$

所以可取 β, δ 适合

$$|\delta|^2 = (1 + |\mu|^{-2}|\lambda - \nu|^2)^{-1} = |\mu|^2(|\lambda - \nu|^2 + |\mu|^2)^{-1},$$

$$|\beta|^2 = |\lambda - \nu|^2(|\lambda - \nu|^2 + |\mu|^2)^{-1}.$$

又

$$\beta = -e^{i\theta}\overline{\mu}^{-1}(\overline{\lambda}-\overline{\nu})\delta,$$

所以可取

$$\delta = -\overline{\mu}(|\lambda-\nu|^2+|\mu|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\beta = e^{i\theta}(\overline{\lambda}-\overline{\nu})(|\lambda-\nu|^2+|\mu|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = -\mu^{-1}\overline{\mu}(\lambda-\nu)(|\lambda-\nu|^2+|\mu|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha = -e^{i\theta}\overline{\mu}(|\lambda-\nu|^2+|\mu|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

这时 $\begin{pmatrix} \nu & \mu e^{i\theta} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ 酉等价. 至此证明了断言.

6.2.5 有限个抛物线内部不能覆盖平面. (这里抛物线内部是指下图中的阴影部分.)

分析 有了证明 6.1.5 的经验 (见该处的分析及证明), 亦可退一步想: 有限个抛物线内部不能覆盖某条直线, 或别的什么. 然而如何选取这种几何对象呢?

根据二次曲线的常识知道, (一支) 双曲线内部及抛物线内部可被包含于一个角形域中. 包含双曲线内部的所有角形域的张角大小有一个正的下界, 即双曲线的两条渐近线所张成的一个角度. 对于抛物线而言, 可以有张角任意小的角形域包含其内部, 如果角形域的顶点在抛物线之外充分远处.

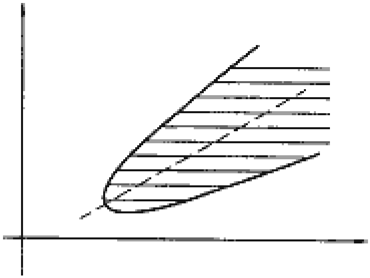


图 6.2.5

这样, 所应选取的不能被完全覆盖的那个对象似乎为射线 (与角形域相匹配) 为宜; 或者, 由平面几何的知识知道, 圆内一个角度为 α 的角的内部与圆周的交集 (圆弧) 不超过 2α 弧度, 因而我们所要取的几何对象亦可为某个圆周.

证法 1 设给定抛物线 P, 其内部记为 P_0.

现证: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个张角小于 ε 的角形域 A 包含 P_0.

事实上, 由于上述命题所述性质关于旋转, 平移是不变的, 因此不妨设

P 的方程为

$$y = ax^2, \qquad a > 0,$$

则其内部为 $y > ax^2$.

令 $k > \cot(\varepsilon/2)$, $b = k^2/(4a)$, 则由 $y = kx - b$ 和 $y = -kx - b$ 所构成的向上 (即向 y 增加的方向) 张开的角形域 A 就包含 P_0, 且其张角 $< \varepsilon$.

事实上, $k > \cot\dfrac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow \tan(\arctan k) > \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\Longleftrightarrow \arctan k > \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

但 $(\pi/2) - \arctan k$ 即为角形域 A 的张角 α 的一半, 因此 $\alpha < \varepsilon$. 此外, 由于对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} ax^2 - (\pm kx - b) &= ax^2 \mp kx + \frac{k^2}{4a} \\ &= a\left(x^2 \mp \frac{k}{a}x + \frac{k^2}{4a^2}\right) = a\left(x \mp \frac{k}{2a}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

所以抛物线 P 上的点都不在角形域 A 的边界 $y = \pm kx - b$ 之下, 因而 A 包含 P_0.

显然, 一条抛物线的内部不能覆盖 $\mathbb{R}^2$.

现设在 $\mathbb{R}^2$ 中给定 n 条抛物线 $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}, n \geq 2$, 它们的内部分别记为 $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots, P_0^{(n)}$.

令 $\tau \in (0, 2\pi/n)$. 对每一 $P^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 作一个张角等于 τ 的角形域 $A^{(i)}$ (只需在上一段论证中取 $k = \cot(\tau/2)$) 包含 $P_0^{(i)}$. 在 $\mathbb{R}^2$ 中建立极坐标, 原点记为 O. 把 $A^{(i)}$ (的角顶点) 平移至点 O 处, 记为 $B^{(i)}$, 则 $B^{(i)}$ 的两条边界射线的极坐标方程分别为

$$\theta = \theta_i \text{ 和 } \theta = \theta_i + \tau, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于 $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$ 张角的总和为 $n\tau$, 而 $n\tau < 2\pi$, 所以存在以原点为端点的射线 $\theta = \tau_0$, 它与所有角形域 $B^{(i)}$ 之并 $\bigcup_{i=1}^{n} B^{(i)}$ 之交为空集 (不计端点 O). 为此, 只需且必须取 $\tau_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n}(\theta_i, \theta_i + \tau)$.

现证: 任一角形域 $A^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) 至多包含射线 $\theta = \tau_0$ 的有限部分, 或者等价地, 射线 $\theta = \tau_0$ 经过任何平移, 至多有有限部分包含于 $B^{(i)}$ 中.

事实上, 对于确定的 i, 我们有下面显然的等价关系:

射线 $\theta = \tau_0$ 经过某个平移后有无限部分包含于 $B^{(i)}$ 中 $\Longleftrightarrow$ 射线 $\theta = \tau_0$ 经过一个平移后完全包含于 $B^{(i)}$ 中 $\Longleftrightarrow \theta_i < \tau_0 < \theta_i + \tau$.

但 $\tau_0 \notin \bigcup_{i=1}^n(\theta_i,\theta_i+\tau)$, 所以射线 $\theta=\tau_0$ 至多只能被 $A^{(i)}$ 包含其有限部分，因而也至多被 $\bigcup_{i=1}^n A^{(i)}$ 包含有限部分. 而

$$\{(r,\theta)\ \mid\ \theta=\tau_0\}\cap\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}\subset\{(r,\theta)\ \mid\ \theta=\tau_0\}\cap\bigcup_{i=1}^n A^{(i)},$$

所以有限个抛物线内部 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 不能覆盖射线 $\theta=\tau_0$, 因而也不能覆盖 $\mathbb{R}^2$.

证法 2　设在 $\mathbb{R}^2$ 中给定 n 条抛物线 $P^{(1)},P^{(2)},\dots,P^{(n)}$, 它们的内部分别记为 $P_0^{(1)},P_0^{(2)},\dots,P_0^{(n)}$.

由证法 1 知, 存在角形域 $A^{(1)},A^{(2)},\dots,A^{(n)}$, 它们分别包含 $P_0^{(1)},P_0^{(2)},\dots,P_0^{(n)}$, 并且它们中每一个的张角小于 π/n.

取一个圆周 C, 其内部包含每个角形域 $A^{(i)}$ 的顶点， $i=1,2,\dots,n$. 则 $A^{(i)}\cap C$ 的弧度数 $<2\pi/n,\ i=1,2,\dots,n$, 因而 $(\bigcup_{i=1}^n A^{(i)})\cap C$ 的弧度数 $<2\pi$. 因而 $\bigcup_{i=1}^n A^{(i)}$ 不能覆盖 C. 又 $\left(\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}\right)\cap C\subset(\bigcup_{i=1}^n A^{(i)})\cap C$, 所以 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 不能覆盖 C, 因而 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 更不能覆盖 $\mathbb{R}^2$.

证法 3　给定抛物线 $y=ax^2$ (这里 $a>0$), 记为 P, 其内部记为 P_0, $P_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ y>ax^2\}$. 则对 $\forall k>0$, 存在 $X>0$, 使得 $\{(x,y)\ \mid\ X<|x|\}\cap P_0\subset A$, 其中角形域 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ y>k|x|\}$ 与 P 有相同的顶点.

事实上, 可取 $X=k/a$, 则当 $|x|>k/a$ 时, 有 $ax^2>k|x|$. 因此 $\{(x,y)\ \mid\ |x|>k/a\}\cap P_0\subset A$.

角形域 A 的张角 $\tau=\pi-2\arctan k$, 它随 $k\to+\infty$ 而趋于 0.

设圆周 C 包含 P 的顶点 p 以及 P 与角形域 A 的边界的两个交点 Q_+,Q_-. 由上述知， $P_0\cap C\subset A\cap C$.

现设给定了 n 条抛物线 $P^{(1)},\dots,P^{(n)}$, 它们的内部分别记为 $P_0^{(1)},\dots,P_0^{(n)}$, 它们的顶点分别记为 $p^{(1)},\dots,p^{(n)}$. 过 $p^{(1)},\dots,p^{(n)}$ 分别作角形域 $A^{(1)},\dots,A^{(n)}$ (如上所述), 使得每个角形域的张角为 $\tau,\ \tau<\pi/n$. $A^{(i)}$ 的边界与 $P^{(i)}$ 的交点记为 $Q_+^{(i)},Q_-^{(i)},\ i=1,2,\dots,n$.

作一个圆周 C, 它的内部包含了 $3n$ 个点

$$p^{(1)},\dots,p^{(n)},Q_+^{(1)},Q_-^{(1)},\dots,Q_+^{(n)},Q_-^{(n)}$$

. 由证法 2 知， $\bigcup_{i=1}^n A^i$ 不能覆盖 C, 而 $\left(\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}\right)\cap C=\bigcup_{i=1}^n(P_0^{(i)}\cap C)\subset\bigcup_{i=1}^n(A^{(i)}\cap C)=(\bigcup_{i=1}^n A^{(i)})\cap C$, 所以 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 也不能覆盖 C, 故而 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 不能覆盖 $\mathbb{R}^2$.

证法 4 记号 $P^{(1)},\ldots,P^{(n)};P_0^{(1)},\ldots,P_0^{(n)};p^{(1)},\ldots,p^{(n)}$ 如证法 3 中所述. 如证法 3 那样, 过 $p^{(1)},\ldots,p^{(n)}$ 分别作角形域 $A^{(1)},\ldots,A^{(n)}$, 角形域的张角都为 τ, $\tau<2\pi/n$. 由证法 3 知, $P_0^{(i)}-A^{(i)}$ 为一有界集, $i=1,2,\ldots,n$.

由证法 1 知, 存在一条射线 $\theta=\tau_0$ (记为 l), 使得 $l\cap A^{(i)}=\emptyset$, 或者 $l\cap A^{(i)}$ 为一有界集, $i=1,2,\ldots n$. 所以 $l\cap\bigcup_{i=1}^n A^{(i)}$ 为一有界集 (若把 $\emptyset$ 也看成有界集), 但 $P_0^{(i)}-A^{(i)}$ 为一有界集, 又

$$l\cap\left(\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}\right)\subset\left[l\cap\left(\bigcup_{i=1}^n A^{(i)}\right)\right]\cup\left\{l\cap\left[\bigcup_{i=1}^n\left(P_0^{(i)}-A^{(i)}\right)\right]\right\},$$

所以 $l\cap\left(\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}\right)$ 也是有界集, 即 $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 不能覆盖 l, 因而, $\bigcup_{i=1}^n P_0^{(i)}$ 不能覆盖 $\mathbb{R}^2$.

第七届全国大学生数学夏令营试题解答

第一试

7.1.1 设 m,n 为奇正整数，$(m,n)=1$，试证：

$$\sum_{0<i<\frac{m}{2}}\left[\frac{ni}{m}\right]+\sum_{0<j<\frac{n}{2}}\left[\frac{mj}{n}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{4}.$$

证明 令 $m=2m_0+1, n=2n_0+1$，于是

$$\frac{(m-1)(n-1)}{4}=m_0n_0=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right].$$

另一方面，作图 7.1.1 如右，相应点坐标为 $A(m/2,0)$, $B(0,n/2)$, $C(m/2,n/2)$. 于是矩形 $OACB$ 中 (不含 x 轴和 y 轴) 整点个数为 $[m/2]\cdot[n/2]$.

首先，直线 OC 之方程为 $my=nx$. 而开线段 OC 上面无整点. 事实上，若有整点 (u,v)，则

$$mv=nu.$$

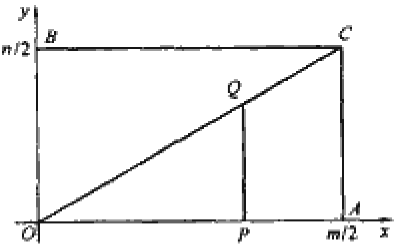


图 7.1.1

由 $(m,n)=1$ 有 $n|v$, $m|u$, 但是 $0\le u\le m/2, 0\le v\le n/2$, 所有只有 $u=0, v=0$. 所以开线段 OC 上无整点. 又 x 轴及 y 轴上整点不算. 再者，AC, BC 上无整点.

今任取整数 $i, 0<i<m/2$, 于是 x 轴有点 $P(i,0)$. 作垂线 $PQ\perp OA$, 交 OC 于点 Q. 于是点 Q 坐标为 $(i,ni/m)$. 因此线段 PQ 上有整点 $[ni/m]$ 个. 于是 $\triangle OAC$ 中有整点 $\sum_{0<i<m/2}[ni/m]$ 个. 同理，$\triangle OBC$ 中有整点 $\sum_{0<j<n/2}[mj/n]$ 个. 因此证明了矩形 $OACB$ 内整点总数为

$$\sum_{0<i<m/2}\left[\frac{ni}{m}\right]+\sum_{0<j<n/2}\left[\frac{mj}{n}\right],$$

它必须等于 $[m/2]\cdot[n/2]$. 证毕.

7.1.2 设 A 和 B 为 n 阶实正交方阵. 试证: $\det A\cdot\det B=1$ 当且仅当 $n-\operatorname{rank}(A+B)$ 为偶数.

证明 由题意可知我们必须计算 $\operatorname{rank}(A+B)$. 今

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}A(I+A^{-1}B)=\operatorname{rank}(I+A^{-1}B).$$

由 $A^{-1}B$ 为实正交方阵, 所以为酉方阵. 因此存在酉方阵 U, 使得

$$A^{-1}B=U\operatorname{diag}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})U^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}n-\operatorname{rank}(A+B)&=n-\operatorname{rank}(I+A^{-1}B)\\&=n-\operatorname{rank}\left(U\operatorname{diag}(1+e^{i\theta_1},\cdots,1+e^{i\theta_n})U^{-1}\right)\\&=n-\operatorname{rank}\left(\operatorname{diag}(1+e^{i\theta_1},\cdots,1+e^{i\theta_n})\right).\end{aligned}$$

设 $e^{i\theta_1}\neq-1,\cdots,e^{i\theta_r}\neq-1,\ e^{i\theta_{r+1}}=\cdots=e^{i\theta_n}=-1$, 于是

$$n-\operatorname{rank}(A+B)=n-r.$$

所以证明了 $n-\operatorname{rank}(A+B)$ 为偶数当且仅当 $A^{-1}B$ 的本征值 -1 之重数为偶数.

注意到 $A^{-1}B$ 为实正交方阵, 它的非实本征值与其共轭成对出现, 所以 $A^{-1}B$ 之本征值为下面 3 种:

(i) $\lambda\neq\pm1$, $\lambda,\overline{\lambda}$ 成对出现; (ii) $\lambda=1$; (iii) $\lambda=-1$.

于是 $\det(A^{-1}B)=(-1)^{n-r}$. 因此 $n-\operatorname{rank}(A+B)$ 为偶数当且仅当 $\det(A^{-1}B)=1$.

另一方面, 由 $AA'=I$ 可知 $A^{-1}=A'$, 因此

$$\det A\cdot\det B=\det A'\cdot\det B=\det A^{-1}\cdot\det B=\det(A^{-1}B),$$

所以 $n-\operatorname{rank}(A+B)$ 为偶数当且仅当 $\det A\cdot\det B=1$.

说明 1. 可以不用酉方阵. 但是要知道任一实正交方阵实正交相似于下面标准形

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_1&\sin\theta_1\\-\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_s&\sin\theta_s\\-\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{pmatrix},I^{(r-2s)},-I^{(n-r)}\right)$$

这里 $0<\theta_1,\cdots,\theta_s<\pi$.

2. 多数同学写出之标准形为

$$\operatorname{diag}(I^{(n)},-I^{(v)}),$$

这是不对的. 他们从 $AA'=I$ 推出 $\det A=\pm1$, 然后错误地推出本征值必须为 ±1, 忘了实方阵可以有非实的本征值.

7.1.3 给定直线上的实值连续函数 f,g. 设对直线上具有紧支集的所有一阶连续可微的实值函数 h, 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证: g 为一阶连续可微函数, 并且

$$g'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

分析 所给等式的形式显然与分部积分有关. 如果 g 是一阶连续可微的, 则由分部积分可得: 对 $\forall h\in C_c^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上具有紧支集的一阶连续可微实值函数的全体), 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x &= g(x)h(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

与题设条件结合, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x,$$

或者

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-g'(x))h(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad \forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

由函数 h 的任意性及 f,g' 的连续性不难得到 $g'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

事实上, 若 $x_0\in\mathbb{R}$, 使 $g'(x_0)\neq f(x_0)$, 不妨设 $g'(x_0)<f(x_0)$, 则由于 f,g' 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得 $g'(x)<f(x),\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 容易构造函数 $h_0\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 使得对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $h_0(x)>0$; 对 $\forall x\notin(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $h_0(x)=0$. 则

$$\begin{aligned}0&=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-g'(x))h_0(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(f(x)-g'(x))h_0(x)\,\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

得矛盾.

这样, 必有

$$g(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s+g(0). \tag{1}$$

有了目标就容易处理了. 对 $\forall f\in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ 恒存在, 且连续可微. 对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ 进行分部积分, 其结果中就出现了 $\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$, 且得到一个接近于目标的等式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x f(s)\mathrm{d}s\right)h'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

再发挥函数 h 的任意性的威力即可得式 (1).

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}x$, 则 $F\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 且对 $\forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x &= F(x)h(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)h'(x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)h'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

结合题设条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}),$$

得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(g(x)-F(x))h'(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad \forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

现证 $G(x)=g(x)-F(x)$ 为常值函数.

$G(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h'(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad \forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}).\tag{2}$$

对任意常数 c, 也有 $\int_{-\infty}^{+\infty} ch'(x)\,\mathrm{d}x=0,\forall h\in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. 现设 $G(x)$ 不是常值函数, 则存在 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$, 使 $G(x_1)\neq G(x_2)$, 因而不妨设 $G(x_1)>0>G(x_2)$. 由于 $G(x)$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得 $(x_1-\delta,x_1+\delta)\cap(x_2-\delta,x_2+\delta)=\emptyset$, 且对 $\forall x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$, $\forall y\in(x_2-\delta,x_2+\delta)$, 有 $G(x)>0>G(y)$.

现构造函数 $h_1 \in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. 令

$$h_1'(x) = \begin{cases} -|x-x_1|+\delta, & x \in (x_1-\delta, x_1+\delta), \\ |x-x_2|-\delta, & x \in (x_2-\delta, x_2+\delta), \\ 0, & x \notin \bigcup_{j=1}^{2}(x_j-\delta, x_j+\delta) \end{cases}$$

(见图 7.1.3) 及 $h_1(x) = \int_{-\infty}^{x} h_1'(s)\,\mathrm{d}s$. 则显然 $h_1 \in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. 由于对 $\forall x \in (x_1-\delta, x_1+\delta) \cup (x_2-\delta, x_2+\delta)$, 有 $G(x)h_1'(x) > 0$, 所以

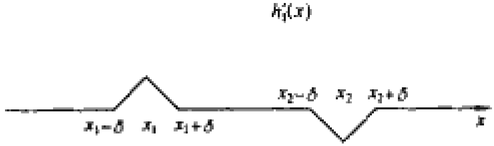


图 7.1.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h_1'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} G(x)h_1'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} G(x)h_1'(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

这与 $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = 0, \forall h \in C_0^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 矛盾.

因此, $G(x) = g(x) - F(x) = g(x) - \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ 为常值函数, 即 $G(x) \equiv G(0), \forall x \in \mathbb{R}$. 但 $G(0) = g(0)$, 所以

$$g(x) = g(0) + \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s, \forall x \in \mathbb{R}.$$

即 $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 且

$$g'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

说明 1. 若题设条件中的积分等式对于 $\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 都成立, 则原结论亦真.

事实上, 只需在原证明中把 $C_0^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 都改为 $C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 且对假设不恒等于常数的连续函数 $G(x)$, 能构造出函数 $h_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h_2'(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ 即可.

满足这些条件的函数 h_2 可按下述方式作出:

令

$$
\begin{aligned}
\rho(x) &= \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \\
\varphi(x) &= \frac{\rho(1-x^2)}{\rho(1-x^2)+\rho(x^2)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

则 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$、$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$，且 $|x| \ge 1$ 时 $\varphi(x) = 0$; $|x| < 1$ 时 $\varphi(x) > 0$; $0 \le \varphi(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

令

$$
\begin{aligned}
h_2'(x) &= \varphi\left(\frac{x-x_1}{\delta}\right) - \varphi\left(\frac{x-x_2}{\delta}\right), \\
h_2(x) &= \int_{-\infty}^{x} h_2'(s)\,\mathrm{d}s \, \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

显然 $h_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$; 当 $x \in (x_1-\delta, x_1+\delta)$ 时 $h_2(x) > 0$; 当 $x \in (x_2-\delta, x_2+\delta)$ 时 $h_2(x) < 0$; $x \notin \bigcup_{j=1}^{2}(x_j-\delta, x_j+\delta)$ 时 $h_2(x) = 0$. 此外，

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h_2'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} G(x)h_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} G(x)h_2'(x)\,\mathrm{d}x > 0.
$$

2. 设函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g 局部 (L) 可积．如果存在一个局部 (L) 可积函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 对 $\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 满足

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x,
$$

则称 f 为 g 的 n 阶广义导数． $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中的函数 h 称为试验函数.

对于多元函数，亦可定义其各阶广义导数．进而，可以引进广义函数的概念.

7.1.4 利用 Cauchy 积分定理及

$$
\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},
$$

计算积分

$$
\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.
$$

分析 Cauchy 积分定理可叙述如下：

如果函数 $f(z)$ 在一个单连通域 $D\subset\mathbb{C}$ 内解析，$C\subset D$ 是一条简单闭曲线，则有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

要把欲求其积分值的被积函数 $\sin(x^2)$, 其积分范围及已知积分值的积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 与一解析函数 $f(z)$ 及一围道 C 联系起来，不妨取 $f(z)=e^{-z^2}$ 或 $f(z)=e^{iz^2}$. 这时因为前者当 $z=x$ 时为 e^{-x^2}, 当 $z=e^{i\frac{\pi}{4}}x$ 时为 $e^{-e^{\frac{\pi}{2}i}x^2}=e^{-ix^2}=\cos(x^2)-i\sin(x^2)$, 其虚部为 $-\sin(x^2)$; 后者当 $z=e^{i\frac{\pi}{4}}x$ 时为 e^{-x^2}, 当 $z=x$ 时为 $e^{ix^2}=\cos(x^2)+i\sin(x^2)$, 其虚部为 $\sin(x^2)$. 因此，在这两种情形积分路径 C 都要包含实轴 (的一部分) 和直线 $x=y$ (的一部分). 为了使 C 为闭曲线，还要把两条半直线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ y=0,x\geq 0\}$ 和 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid\ x=y,x\geq 0\}$ 的一部分用曲线相连. 为了估值方便，此曲线用规则曲线 $r=R$ 为宜.

解法 1 令 $f(z)=e^{-z^2}$, $z\in\mathbb{C}$. 则 f 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数.

取积分围道 C_R 如图 7.1.4 所示，则 $C_R=I_R+S_R+II_R$. 由 Cauchy 积分定理知，对 $\forall R>0$, 有 $\int_{C_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z=0$. 所以

$$\begin{aligned}0=\int_{C_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z&=\int_{I_R+S_R+II_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z\\&=\int_{I_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z+\int_{S_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z+\int_{II_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

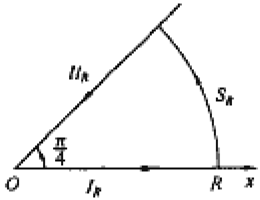


图 7.1.4

因此

$$\int_{II_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z=-\int_{I_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z-\int_{S_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z.$$

又

$$\begin{aligned}\int_{II_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z&=\int_{II_R}e^{-r^2e^{i\frac{\pi}{2}}}\,\mathrm{d}(re^{i\frac{\pi}{4}})=e^{i\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-ir^2}\mathrm{d}r\\&=-e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^R\cos(x^2)\,\mathrm{d}x-i\int_0^R\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)\\&\equiv-e^{i\frac{\pi}{4}}(I_c^{(R)}-iI_s^{(R)}),\end{aligned}$$

$$\int_{I_R}e^{-z^2}\mathrm{d}z=\int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_R} e^{-z^2}\mathrm{d}z &= \int_{S_R} e^{-R^2e^{i2\theta}}\,\mathrm{d}(Re^{i\theta}) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} Rie^{i\theta}e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos 2\theta}\cdot ie^{i\theta}e^{-iR^2\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S_R} e^{-z^2}\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&< \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (\text{因为}\ \tau\in(0,\pi/2)\ \text{时}\ \sin\tau > 2/(\pi\tau)) \\
&= R\cdot\left(-\frac{\pi}{4R^2}e^{-\frac{4R^2}{\pi}\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) < \frac{\pi}{4R},
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} e^{-z^2}\mathrm{d}z = 0,$$

故

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty}\int_{II_R} e^{-z^2}\mathrm{d}z \\
&= -e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x - i\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - i\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

存在，并且

$$-e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - i\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

即

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - i\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

解法 2 令 $f(z)=e^{iz^2}$, $z\in\mathbb{C}$. 则 f 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数. 由 Cauchy 积分定理知, 对 $\forall R>0$, 有

$$\int_{C_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z=0,$$

其中 C_R 如解法 1 中所述. 因此

$$\int_{I_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z=-\int_{II_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z-\int_{S_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z.$$

又

$$\begin{aligned}\int_{I_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z &=\int_0^R e^{ix^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x+i\int_0^R \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\\ &\equiv I_c^{(R)}+iI_s^{(R)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{II_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z &=\int_{II} e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}}\,\mathrm{d}(re^{i\frac{\pi}{4}})=e^{i\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\\ &=-e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-r^2}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{S_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z &=\int_{S_R} e^{iR^2e^{i2\theta}}\,\mathrm{d}(Re^{i\theta})\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}} Rie^{i\theta}e^{-R^2\sin 2\theta+iR^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_{S_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta<\frac{\pi}{4R}.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_{II_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z &=-e^{i\frac{\pi}{4}}\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\\ &=-e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\end{aligned}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z=0,$$

故

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}I_s^{(R)},\quad \int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}I_c^{(R)}$$

收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x+i\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

所以 $$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

7.1.5 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 $f(x)$ 如下：任取 $x\in[0,1)$，设 x 的十进小数表示为 $x=0.\,n_1n_2n_3\cdots$，定义

$$f(x)=\max_{1\le i<+\infty}n_i,$$

又 $f(1)=1$.

试证：$f(x)$ 为可测函数.

分析 在 $[0,1)$ 中的某些数的小数表示不是唯一的，这些数的全体即为有限小数集合，它们有两种表示：$x=0.n_1n_2\cdots n_s,\ s\ge 1,\ n_s\neq 0$ 和 $x=0.m_1m_2\cdots m_sm_{s+1}\cdots$，其中 $m_j=n_j,\ j=1,2,\ldots,s-1;\ m_s=n_s-1;\ m_j=9,\ j=s+1,s+2,\ldots$. 当采用第 2 种表示时，$f(x)=9$；当采用第 1 种表示时，$f(x)$ 未必是 9. 然而，$[0,1)$ 中有限小数的全体是可数集，它不会影响 $[0,1)$ 中任何集合的可测与否. 同样，一个点 $x=1$ 也不会影响集合的可测与否.

根据函数 f 的定义知，$R(f)\subset\{0,1,2,\ldots,9\}$. 因此只需证明 $D_j=\{x\in[0,1]\mid f(x)=j\}$ 是可测集即可，$j=0,1,2,\ldots,9$.

不难发现，当 $x\in(0.9,1)$ 时，$\max\limits_{1\le i<+\infty}n_i=9$. 事实上，$n_1=9$. 因此 $f(x)=9$.

数字 9 在 $0,1,\ldots,9$ 中有其特殊性：对于 $x=0.n_1n_2\cdots$，只要有某一 $n_i=9$，则 $f(x)=9$.

因此可先考察 D_9. 显然，$D_9=\bigcup_{j=1}^{\infty}D_9^{(j)}$，其中 $D_9^{(j)}=\{x=0.n_1n_2\cdots\mid n_1<9,n_2<9,\cdots,n_{j-1}<9,n_j=9\}$. 容易知道，对于每一个 $j,\ j=1,2,\ldots$，$D_9^{(j)}$ 是一些互不相交的区间之并，因而可测. 并且，经计算知

$$\operatorname{meas}D_9=\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{meas}D_9^{(j)}=1.$$

因而也必然有 $\operatorname{meas}D_0=\operatorname{meas}D_1=\cdots=\operatorname{meas}D_8=0$，即 f 几乎处处等于 9，因而 f 可测.

说明 根据分析中所述，为确定起见，对于有限小数，我们用有限的小数形式作为它的小数表示；并且，视 f 的定义域为 $[0,1)$. 这一说明对以下几种证法都适用.

证法 1 记 $D_j=\{x\in[0,1)\mid f(x)=j\},\ j=0,1,2,\ldots,9$. 令 $D_9=\bigcup_{j=1}^{\infty}D_9^{(j)}$，其中 $D_9^{(j)}=\{x=0.n_1n_2\cdots\in[0,1)\mid n_j=9,n_i<9,i=$

$1,2,\dots,j-1\}$. 则

$$D_9^{(1)}=\left[\frac{9}{10},1\right),\ D_9^{(2)}=\bigcup_{i=0}^{8}\left[\frac{i}{10}+\frac{9}{10^2},\frac{i+1}{10}\right),$$

$$D_9^{(3)}=\bigcup_{i,k=0}^{8}\left[\frac{i}{10}+\frac{k}{10^2}+\frac{9}{10^3},\frac{i}{10}+\frac{k+1}{10^2}\right),\cdots.$$

$D_9^{(1)}$ 由一个长度为 1/10 的区间组成; $D_9^{(2)}$ 由 9 个长度为 $1/10^2$ 的互不相交的区间组成; $D_9^{(3)}$ 由 9^2 个长度为 $1/10^3$ 的互不相交的区间组成; $\cdots$. 此外, $j\neq l$ 时, $D_9^{(j)}$ 和 $D_9^{(l)}$ 的组成区间亦互不相交. 因此,

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} D_9&=\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{meas} D_9^{(j)}\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}\times 9+\frac{1}{10^3}\times 9^2+\cdots+\frac{1}{10^n}\times 9^{n-1}+\cdots=1.\end{aligned}$$

即 f 几乎处处为 9, 所以 f 为可测函数.

证法 2 记号 $D_9, D_9^{(j)}\ (j=1,2,\dots)$ 同证法 1.

显然, $D_9^{(j)}$, $j=1,2,\dots$, 因而 $D_9=\bigcup_{j=1}^{\infty}D_9^{(j)}$, 是一些开区间的并集, 故 D_9 可测. 设 $\operatorname{meas} D_9=a$.

由相似性, 在区间 $(0,1/10),(1/10,2/10),\cdots,(8/10,9/10)$ 中使 $f(x)=9$ 的点集的测度均为 $a/10$; 而在整个区间 $(9/10,1)$ 中 $f=9$. 因此得到关于 a 的方程

$$a=\frac{a}{10}\times 9+\frac{1}{10}.$$

解之, 得 $a=1$, 即 $\operatorname{meas} D_9=1$, 亦即 f 几乎处处等于 9, 所以 f 是可测函数.

证法 3 令 $E_c=\{x\in[0,1)\ |\ f(x)>c\}$. 由可测函数定义, f 可测 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall c\in\mathbb{R}$, E_c 可测.

显然, $c<0$ 时 $E_c=[0,1)$, 可测; $c\geq 9$ 时 $E_c=\emptyset$, 可测.

现令 $0\leq c<9$, 记 $m=[c]$. 则 $0\leq m\leq 8$, $m\in\mathbb{Z}$, 且

$$\begin{aligned}E_c&=\{x\in[0,1)\ |\ f(x)\geq m+1\}\\&=\{x=0.n_1n_2\cdots\ |\ \text{存在}\,i,\ \text{使}\,n_i\geq m+1\}\\&=\left[\frac{m+1}{10},1\right)\cup\left(\bigcup_{0\leq k_1\leq m}\left[\frac{k_1}{10}+\frac{m+1}{10^2},\frac{k_1+1}{10}\right)\right)\\&\quad\cup\left(\bigcup_{0\leq k_1,k_2\leq m}\left[\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\frac{m+1}{10^3},\frac{k_1}{10}+\frac{k_2+1}{10^2}\right)\right)\cup\cdots,\end{aligned}$$

所以 E_c 为可数个区间之并，因此 E_c 可测.

由可测函数的定义知， f 可测.

证法 4　E_c 的定义如证法 3 中所述. 由证法 3 知，当 $c<0$ 和 $c\geq 9$ 时，E_c 可测.

设 $c\in[0,9)$, 记 $m=[c]$, 则 $0\leq m\leq 8$, $m\in\mathbb{Z}$, 且

$$E_c=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\,x=0.n_1n_2\cdots\ \mid\ n_i\geq m+1\,\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_c^{(i)},$$

其中 $E_c^{(1)}=\{\,x\in[0,1)\ \mid\ (m+1)/10\leq x<1\,\}$; $i\geq 2$ 时， $E_c^{(i)}$ 为

$$E_c^{(i)}=\bigcup_{0\leq n_1,\ldots,n_{i-1}\leq 9}\left\{x\in[0,1)\ \Big|\ \frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\cdots+\frac{n_{i-1}}{10^{i-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{m+1}{10^i}\leq x<\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\cdots+\frac{n_{i-1}+1}{10^{i-1}}\right\}.$$

显然， $E_c^{(i)}\,(i=1,2,3,\ldots)$ 为一些区间之并，所以可测，因而 E_c 也是可测集.

由可测函数的定义知， f 可测.

说明　证法 3 与证法 4 的不同之处在于，前者把

$$E_c\,(c\in[0,9))$$

表为互不相交的区间之并，而后者把 E_c 表为可有非空交集的一些区间之并.

证法 5　构造一个函数序列 $\{f_k(x)\}$ 如下：

$$f_k(x)=n_k,\ \text{当}\ x=0.n_1n_2\cdots n_k\cdots\ \text{时},\ k=1,2,\ldots.$$

定义集合族 $\{\,F^{(m)}_{n_1,\ldots,n_{k-1}}\ \mid\ n_1,\ldots,n_{k-1},m\in\{0,1,\ldots,9\}\,\}$ 如下：

$$k=1\text{时}\ F^{(m)}_{n_1,\ldots,n_{k-1}}=\left\{x\in[0,1)\ \Big|\ \frac{m}{10}\leq x<\frac{m+1}{10}\right\},$$

$$k\geq 2\text{时}\ F^{(m)}_{n_1,\ldots,n_{k-1}}=\left\{x\in[0,1)\ \Big|\ \frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m}{10^k}\right.$$
$$\left.\leq x<\frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m+1}{10^k}\right\}.$$

则 $F^{(m)}_{n_1,\ldots,n_{k-1}}\,(n_1,\ldots,n_{k-1},m\in\{0,1,\ldots,9\})$ 是一个区间.

显然， $R(f_k)=\{0,1,\ldots,9\}$, $k=1,2,\ldots$, 并且

$$\begin{aligned}f_k^{-1}(m)&=\{\,x\in[0,1)\ \mid\ f_k(x)=m\,\}\\&=\bigcup_{0\leq n_1,\ldots,n_{k-1}\leq 9}F^{(m)}_{n_1,\ldots,n_{k-1}},\qquad m\in\{0,1,\ldots,9\},\end{aligned}$$

$$f_k^{-1}(m)=\emptyset, \qquad m\notin\{0,1,\ldots,9\},$$

因而对 $\forall m\in\mathbf{R}$, $f_k^{-1}(m)$ 是可测的. 这样,

$$E_{c,k}=\left\{x\in[0,1)\ \middle|\ f_k(x)>c\right\}=\bigcup_{m<c}f_k^{-1}(m)$$

是可测的 (注意, $\bigcup_{m<c}f_k^{-1}(m)$ 中至多有限个 $f_k^{-1}(m)$ 不是空集, 而这有限个 $f_k^{-1}(m)$ 都是可测集). 因而函数 f_k 是可测函数, $k=1,2,\ldots$.

定义 $g_k(x)=\max\limits_{1\le i\le k}\{f_i(x)\}$, $k=1,2,\ldots$, 则 g_k 也是可测函数, $k=1,2,\ldots$. 所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\max_{1\le k<+\infty}n_k=\max_{1\le k<+\infty}f_k(x)\\&=\lim_{k\to+\infty}\max_{1\le i\le k}\{f_i(x)\}=\lim_{k\to+\infty}g_k(x)\end{aligned}$$

作为可测函数的极限函数也是可测函数.

第二试

7.2.1 给定实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 它满足条件

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$,

(b) $\displaystyle 0<a_n\le\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$, $\forall n=1,2,\ldots$.

试证: 对任意实数 $x\in(0,1)$, 都有 $\{a_n\}$ 的子序列 $\{a_{n_k}\}$ 存在, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x.$$

分析 一个自然的想法是: 对于每个 a_n, 从 $n=1,2,\ldots$ 往后数, 如能收进 $\{a_{n_k}\}$ 中的, 则要收入其中. 具体地说, 如 $a_1<x$, 则取 $n_1=1$; 如 $a_j\ge x$, $j=1,2,\ldots,l-1$. 而 $a_l<x$, 则取 $n_1=l$. 接着, 如 $a_{n_1}+a_{n_1+1}<x$, 则取 $n_2=n_1+1$; 如 $a_{n_1}+a_j\ge x$, $j=n_1+1,n_1+2,\ldots,n_1+m-1$, 而 $a_{n_1}+a_{n_1+m}<x$, 则取 $n_2=n_1+m,\ldots$, 诸如此类.

之所以说是 "自然的" 想法, 原因之一, 出于无奈. 例如, 若 $x=3/4$, 而 $a_n=1/2^n$, $n=1,2,\ldots$ (此序列满足题设条件 (a), (b)). 如不取 $n_1=1$, 即不取 $a_{n_1}=a_1$, 则即使把 $a_2,a_3,\ldots$ 都收入 $\{a_{n_k}\}$, 其和也小于 $x:\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}1/2^n=1/2<3/4$. 当取 $a_{n_1}=a_1$ 后, 由于 $a_{n_1}+a_2=1/2+1/4=3/4$,

因此 a_{n_2} 不能取为 a_2. 此时，已不能漏过任一个 $a_n\,(n\geq 3)$ 了. 事实上，$a_{n_1}+\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_2=1-(1/4)=3/4$. 如不把 $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$ 中的任一个收入序列 $\{a_{n_k}\}$, 则必有 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}<3/4=x$.

原因之二，所要证明者为 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$, 由于对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n>0$, 因此必有 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}<x,\ \forall k\in\mathbb{N}$, 因而 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}\leq x$. 从 $\{a_{n_k}\}$ 的形成过程可知，从某种意义上说，能收入 $\{a_{n_k}\}$ 的 a_n 都被收入其中了，因此我们的这种作法必能达到要求：$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$. 也就是说，只要命题是正确的 (即只要给出的条件对于结论是充分的), 则必定有 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$.

上面的叙述中并未利用条件 (b): $0<a_n\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k,\ n=1,2,\ldots$. 这必定会用武于此 (即用于证明 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$). 可以猜想, 如无条件 (b), 则对于如上述所选取的序列 $\{a_{n_k}\}$, 可能会有结果 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}<x$. 例如，序列 $\{a_n\}$ 为：$a_1=3/4,\ a_n=1/2^{n+1},\ n=2,3,\ldots$. 则它满足 (a) 及 $a_n>0,\ n=1,2,\ldots$, 但不满足 (b) (事实上只是当 $n=1$ 时 $\{a_n\}$ 不满足 (b): $a_1=3/4>1/4=\sum_{k=2}^{\infty}a_k$; 对于 $n\geq 2$, 有 $0<a_n=1/2^{n+1}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$). 对于 $\forall x\in(1/4,3/4]$, 按上述选取序列 $\{a_{n_k}\}$ 的方式选取的序列 $\{a_{n_k}\}$ 为 $a_{n_k}=a_{k+1},\ k=1,2,\ldots$. 此时，$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}1/2^{k+2}=1/4<x$.

分析条件 (b) 及我们选取序列 $\{a_{n_k}\}$ 的方式可知：条件 (b) 的作用是使未被选入 $\{a_{n_k}\}$ 的那些 a_n 之值不致于太大：所舍弃的项之值不会超过其后所有项之和. 因此，由 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}<x$, 及 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}+a_{n_k+1}\geq x$, 从而舍弃 a_{n_k+1} 作为 $a_{n_{k+1}}$ 之用；另一方面，由条件 (b) 得 $a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}+\sum_{n=n_k+2}^{\infty}a_n\geq a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}+a_{n_k+1}\geq x$, 从而在 $\{a_{n_k+2},a_{n_k+3},\ldots\}$ 中有足够多具有适当大的数值的项可选作为 $a_{n_{k+1}},a_{n_{k+2}},\ldots$, 使得 $\sum_{k=1}^{K}a_{n_k}\ (K=1,2,\ldots)$ 可任意接近于 x, 即 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$.

证明　对于 $x\in(0,1)$, 令

$$
\begin{aligned}
&n_1=\min\big\{n\in\mathbb{N}\ \big|\ a_n<x\big\},\\
&n_2=\min\big\{n>n_1\ \big|\ a_{n_1}+a_n<x\big\},\\
&\cdots\\
&n_{k+1}=\min\big\{n>n_k\ \big|\ a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_k}+a_n<x\big\},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,2,\ldots,
\end{aligned}
$$

则序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 被归纳地定义了.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. 因此 $\{n_k\}$ 的定义是有意义的，

即 n_k 存在且唯一， $k=1,2,\ldots$.

由于 $a_n>0, n=1,2,\ldots$, 所以序列 $\{\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}\}_{p=1}^{\infty}$ 单调增，且由 $\{n_k\}$ 的定义知 $\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}<x, \forall p=1,2,\ldots$， 所以 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ 收敛，且 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}\le x$.

现证： $\sum_{k=1}^{p-1}a_{n_k}+\sum_{n=n_p}^{\infty}a_n \ge x, p=1,2,\ldots$, 其中， $p=1$ 时约定 $\sum_{k=1}^{p-1}a_{n_k}=0$.

事实上，若 $n_1=1$, 则 $\sum_{n=n_1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1>x$;

若 $n_1>1$, 由 n_1 的定义知 $a_{n_1-1}\ge x$, 因而由条件 (b) 得 $\sum_{n=n_1}^{\infty}a_n\ge a_{n_1-1}\ge x$.

即 $p=1$ 时的不等式得证.

现设 $\sum_{k=1}^{P-1}a_{n_k}+\sum_{n=n_P}^{\infty}a_n\ge x$, 这里 $P\ge 1$.

若 $n_{P+1}=n_P+1$, 则

$$\sum_{k=1}^{P}a_{n_k}+\sum_{n=n_{P+1}}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{P-1}a_{n_k}+\sum_{n=n_P}^{\infty}a_n\ge x;$$

若 $n_{P+1}>n_P+1$, 由 n_{P+1} 的定义知

$$a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_P}+a_{n_{P+1}-1}\ge x,$$

因而由条件 (b) 得

$$\sum_{k=1}^{P}a_{n_k}+\sum_{n=n_{P+1}}^{\infty}a_n\ge\sum_{k=1}^{P}a_{n_k}+a_{n_{P+1}-1}\ge x.$$

即 $p=P+1$ 时的不等式得证.

因而，对 $\forall p=1,2,\ldots$, 所要证的不等式成立.

这样，由于

$$\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}<x\le\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}+\sum_{n=n_{p+1}}^{\infty}a_n,\quad p=1,2,\ldots,$$

所以

$$0<x-\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}\le\left(\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}+\sum_{n=n_{p+1}}^{\infty}a_n\right)-\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}$$
$$=\sum_{n=n_{p+1}}^{\infty}a_n<\sum_{n=p}^{\infty}a_n.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ 知 $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum_{n=p}^{\infty}a_n=0$, 因此 $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}=x$, 即 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=x$.

7.2.2 给定域 F 及其上 n 个两两不同的自同构 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. 试证: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 线性无关.

证明 用归纳法及反证法. 当 $n=1$ 时, 断言显然成立. 设 $n-1$ 个两两不同的自同构必线性无关, 而存在 n 个两两不同的自同构 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 线性相关. 因此存在不全为零之元素 $a_1, \ldots, a_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i = 0.$$

显然无妨设 $a_1 \neq 0$. 由 $\sigma_1 \neq \sigma_n$, 所以存在 $a \neq 0, a \in F, \sigma_1(a) \neq \sigma_n(a)$. 今 $\sum a_i \sigma_i = 0$ 可推出

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(x) = 0, \qquad \forall x \in F,$$

且

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(ax) = 0, \qquad \forall x \in F.$$

因此

$$\sigma_n(a) \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(x) = 0, \qquad \forall x \in F.$$

由于 $\sigma_i(ax) = \sigma_i(a)\sigma_i(x)$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(a) \sigma_i(x) = 0, \qquad \forall x \in F.$$

因而即有

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i(a) \sigma_i(x) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_n(a) \sigma_i(x) = 0, \end{cases} \qquad \forall x \in F.$$

相减有

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\sigma_i(a) - \sigma_n(a)) \sigma_i(x) = 0, \qquad \forall x \in F,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\sigma_i(a) - \sigma_n(a)) \sigma_i = 0.$$

记 $b_i = a_i(\sigma_i(a) - \sigma_n(a)) \in F, 1 \le i < n$. 于是 $b_1 = a_1(\sigma_1(a) - \sigma_n(a)) \neq 0$. 因此由 $\sum_{i=1}^{n-1} b_i\sigma_i = 0$ 推出 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ 线性相关. 这和归纳法假设矛盾. 所以完成了证明.

说明 1. 本题可以把 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 改为 n 个两两不同的非零自同态. 进一步可改为: $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 为域 F 到域 E 上的同态, 且 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 两两不同.

2. 本题之证明用了同态定义中保持乘法之性质, 即 $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. 对 σ 并未用到保持加法之性质, 即没有用到 $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$. 因此它实际上是群, 或更弱一些, 是半群之群环上之性质.

3. 多数同学只证明了 $n = 2$ 的情形, 而没有做一般情形, 其原因在于在 $n = 2$ 时, 由 $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ 可推出 $\sigma_1 = \mu\sigma_2$. 再用自同构的性质, 有 $\sigma_2 = \rho(i_d)$, 其中 i_d 为恒等映射. 进一步证明 $\rho(i_d)$ 为自同构当且仅当 $\rho = 1$, 从而推出 $\sigma_1 = \sigma_2$, 因此导出矛盾. 这种思路是不易从 2 进到 n 的.

7.2.3 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ 上的全纯函数, 且 $|f(z)| \le 1, \forall z \in D$. 设 D 中点 z_0 适合条件

$$0 < |z_0| \le \frac{m-1}{m},$$

其中 m 为一个固定的自然数, 并设 z_0 及 $-z_0$ 都是 $f(z)$ 的 m 重零点. 试证:

$$|f(0)| < e^{-2}.$$

(提示: 考虑将 z_0 映为原点的 D 的保角变换.)

证明 不妨设 $f(z) \not\equiv 0$. 考虑将单位圆盘映为自身上的一一保角变换

$$w = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}.$$

其逆变换为

$$z = \frac{w - z_0}{1 - \overline{z_0}w}.$$

令

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right),$$

于是 $g(z)$ 仍在 D 内全纯.

由条件 $|f(z)| \le 1, \forall z \in D$, 且 f 在 D 内有零点, 所以 $f(z)$ 在 D 内不等于常数. 由最大模原理可知

$$|f(z)| < 1, \qquad \forall z \in D.$$

因此

$$|g(z)| < 1, \qquad \forall z \in D.$$

又由 $f(z)$ 以 z_0 为 m 重零点，所以

$$g(0) = f(z_0) = 0.$$

又 $f(z)$ 以 $-z_0$ 为 m 重零点，所以求 z 使得 $(z+z_0)/(1+\overline{z_0}z) = -z_0$，则有 $z + z_0 = -z_0 - |z_0|^2 z$，即 $z = -2z_0/(1+|z_0|^2)$. 因此

$$g\left(\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2}\right) = 0.$$

令

$$z_1 = -\frac{2z_0}{1+|z_0|^2},$$

则 $g(z)$ 以 0 及 z_1 为 m 重零点，且 $|g(z)| < 1, \forall z \in D$.

构作函数

$$h(z) = \begin{cases} z^{-m} g(z), & \text{当 } 0 < |z| < 1 \text{ 时} \\ m! \left.\dfrac{d^m g(z)}{dz^m}\right|_{z=0}, & \text{当 } z = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

于是 $h(z)$ 仍在单位圆盘 D 内全纯，且在单位圆周上，

$$|h(z)| = |g(z)| \le 1,$$

所以 $|h(z)| < 1, \forall z \in D$; 且由于 $g(z)$ 以原点为 m 重零点，故 $h(0) \neq 0$.

今

$$g(z) = z^m h(z)$$

以 z_1 为 m 重零点，故由 $z_1 \neq 0$, $h(z)$ 仍以 z_1 为 m 重零点. 于是作

$$\widetilde{g}(z) = h((z+z_1)/(1+\overline{z_1}z)),$$

则 $\widetilde{g}(z)$ 以原点为 m 重零点，同上讨论，有另一在 D 内全纯之函数 $\widetilde{h}$, 使得

$$\widetilde{g}(z) = z^m \widetilde{h}(z).$$

今

$$f(0) = g(-z_0) = (-z_0)^m h(-z_0).$$

取 z 使 $(z+z_1)/(1+\overline{z_1}z) = -z_0$, 有 $z + z_1 = -z_0 - z_0\overline{z_1}z$, 即取

$$z = \frac{-z_0 - z_1}{1 + z_0\overline{z_1}}.$$

有

$$\tilde{g}\left(\frac{-z_0-z_1}{1+z_0\overline{z_1}}\right)=h(-z_0).$$

因此

$$f(0)=(-z_0)^m\tilde{g}\left(\frac{-z_0-z_1}{1+z_0\overline{z_1}}\right)=(-z_0)^m\frac{(-z_0-z_1)^m}{(1+z_0\overline{z_1})^m}\tilde{h}\left(\frac{-z_0-z_1}{1+z_0\overline{z_1}}\right).$$

所以由 "$|\tilde{h}(w)|<1, \forall w\in D$" 有

$$|f(0)|<|z_0|^m\left|\frac{z_1+z_0}{1+\overline{z_1}z_0}\right|^m.$$

但是

$$z_1=\frac{-2z_0}{1+|z_0|^2},$$

即 $(z_1+z_0)/(1+\overline{z_1}z_0)=-z_0$, 由题设便证明了

$$|f(0)|<|z_0|^{2m}\leq\left(\frac{m-1}{m}\right)^{2m}.$$

余下要证下面的初等不等式

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^{2m}<e^{-2},$$

即要证

$$e<\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m},$$

或 $1<-m\log(1-(1/m))$, 即要证

$$\log\left(1-\frac{1}{m}\right)<-\frac{1}{m}.$$

令

$$F(x)=\log(1-x)+x,\qquad 0<x<1.$$

则 $F'(x)=-(1/(1-x))+1=-x/(1-x)<0$, 即 $F(x)$ 严格单调递减，所以 $F(x)<F(0)=0, \forall x\in(0,1)$. 这证明了

$$\log\left(1-\frac{1}{m}\right)<-\frac{1}{m}.$$

证毕.

7.2.4 设 (X,d) 为紧距离空间，$\{f_n\}$ 为 X 上的连续函数序列，f 为 X 上的连续函数，它们满足

(a) $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots$, $\forall x \in X$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

试证：函数序列 $\{f_n\}$ 在 X 上一致地收敛于 f.

分析 在数学分析课程中关于连续函数序列的收敛有一个与本题密切相关的定理，即 Dini 定理：

设 $u_n \in C([a,b])$, $u_n(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$, $n = 1,2,\ldots$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $g(x)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$.

若令 $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, 并令 $\Phi_n(x) = g(x) - g_n(x)$, 则有 $\Phi_n \in C([a,b])$, 且 $\Phi_1(x) \geq \Phi_2(x) \geq \cdots \geq \Phi_n(x) \geq \cdots \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$. 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛于}g(x)$$
$$\Longleftrightarrow \Phi_n(x)\text{在}[a,b]\text{上一致收敛于}0\ (n \to +\infty\text{时}).$$

Dini 定理正是通过证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上是一致的而得到证明的.

如在本题中令 $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$, 则所给的条件与所要证的结论在形式上与上述完全一样, 只是把上述的定义区间 $[a,b]$ 代之以紧距离空间 (X,d), 这在本质上没有什么不同, 因为在证 Dini 定理时用到的是区间 $[a,b]$ 的紧性：$[a,b]$ 中的任意序列都有收敛的子序列. 紧距离空间当然也有这样的性质.

证明 令 $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $n = 1,2,\ldots$. 则

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \cdots \geq \varphi_n(x) \geq \cdots \geq 0, \qquad \forall x \in X,$$

φ_n 为 X 上的连续函数，$n = 1,2,\ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$, $\forall x \in X$.

由定义,

$$\{f_n(x)\}\text{在}X\text{上一致收敛于}f(x)$$
$$\Longleftrightarrow \text{对}\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \text{当}\ n \geq N\ \text{时},\ |\varphi_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

由于 $\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \cdots \geq \varphi_n(x) \geq \cdots \geq 0$, $\forall x \in X$, 所以上述等价于

$$\text{对}\forall\varepsilon > 0, \exists N,\ \text{对}\forall x \in X, \text{有}\ \varphi_N(x) < \varepsilon.$$

现设反之，即对于某个 $\varepsilon > 0$ 及 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in X$, 使得 $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$.

由于 (X,d) 是紧距离空间，所以序列 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$，它以某个 $x_0 \in X$ 为极限点：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0$.

对每个 $m \in \mathbf{N}$，由于 φ_m 的连续性，有 $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0)$.

另一方面，当 $n_k \geq m$ 时，有 $\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. 所以 $\varphi_m(x_0) = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$. 因而 $\lim\limits_{m\to+\infty} \varphi_m(x_0) \geq \varepsilon$. 这与 “$\lim\limits_{m\to+\infty} \varphi_m(x) = 0, \forall x \in X$” 矛盾.

这说明所作的假设不成立. 因此，对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 对 $\forall x \in X$, 有 $\varphi_N(x) < \varepsilon$. 所以 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

7.2.5 给定正常数 a, b 及空间曲线 C:

$$\mathbf{r}(t) = (4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3b\cos 2t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

试利用 Frenet 公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

求曲线 C 的曲率 k 和挠率 κ 及 Frenet 标架 $\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$.

解 由定义，单位切向量 $\mathbf{T}$ 可表为

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

经简单计算，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -12a\cos^2 t\sin t\,\mathbf{i} + 12a\sin^2 t\cos t\,\mathbf{j} - 12b\sin t\cos t\,\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12\sqrt{a^2+b^2}\sin t\cos t.$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为空间的单位座标向量.

因此，假定参数 t 增加的方向为曲线的正向，我们有

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} - b\,\mathbf{k}).$$

Frenet 公式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \kappa\\ 0 & -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix},$$

所以单位法向量 $\mathbf{N}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}=\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{1}{k}\frac{a}{12\,(a^2+b^2)\sin t\cos t}\,(\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j})=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

因此

$$k=\frac{12a}{(a^2+b^2)\sin t\cos t}.$$

曲线 C 的单位外法向量 $\mathbf{B}$ 为:

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(b\cos t\,\mathbf{i}-b\sin t\,\mathbf{j}-a\,\mathbf{k}).$$

又,

$$-\kappa\mathbf{N}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{b}{12(a^2+b^2)\sin t\cos t}\,(\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}),$$

所以

$$\kappa=\frac{b}{12(a^2+b^2)\sin t\cos t}.$$

最后答案:

$$\begin{cases}k=\dfrac{12a}{(a^2+b^2)\sin t\cos t},\\[2ex] \kappa=\dfrac{b}{12\,(a^2+b^2)\sin t\cos t},\\[2ex] \mathbf{T}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(-a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+b\,\mathbf{k}),\\[2ex] \mathbf{N}=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j},\\[2ex] \mathbf{B}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(b\cos t\,\mathbf{i}-b\sin t\,\mathbf{j}-a\,\mathbf{k}).\end{cases}$$

第八届全国大学生数学夏令营
试题解答

第一试

8.1.1 试求 $\left[\dfrac{10^{60}}{10^6+3}\right]$ 的个位数，其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分.

解法 1 令

$$\begin{aligned}10^{60}-3^{10} &= (10^{30}-3^5)(10^{30}+3^5)\\ &= (10^{30}-3^5)(10^6+3)\\ &\quad\cdot(10^{24}-3\cdot10^{18}+3^2\cdot10^{12}-3^3\cdot10^6+3^4)\end{aligned}$$

这证明了 $(10^6+3)|(10^{60}-3^{10})$. 另一方面，

$$\frac{10^{60}}{10^6+3}=\frac{10^{60}-3^{10}}{10^6+3}+\frac{3^{10}}{10^6+3},$$

而

$$3^{10}=9^5<10^5<10^6+3,$$

所以

$$0<\frac{3^{10}}{10^6+3}<1.$$

这证明了

$$\begin{aligned}\left[\frac{10^{60}}{10^6+3}\right] &= \frac{10^{60}-3^{10}}{10^6+3}\\ &= 10^{30}(10^{24}-3\cdot10^{18}+3^2\cdot10^{12}-3^3\cdot10^6+3^4)\\ &\quad -3^5\cdot10^{24}+3^6\cdot10^{18}-3^7\cdot10^{12}+3^8\cdot10^6-3^9.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}-3^9 &= -3\cdot9^4=-3(10-1)^4\\ &= -3\cdot10^4+12\cdot10^3-18\cdot10^2+12\cdot10-3\\ &= -3\cdot10^4+12\cdot10^3-18\cdot10^2+11\cdot10+7,\end{aligned}$$

显然

$$10^{54}>3\cdot10^{48}+3^3\cdot10^{36}+3^5\cdot10^{24}+3^7\cdot10^{12}+3\cdot10^4+18\cdot10^2,$$

所以证明了 $[10^{60}/(10^6+3)]$ 的个位数字为 7.

解法 2 因为

$$a \equiv \frac{10^{60}}{10^6+3} = 10^{54}\cdot\frac{10^6}{10^6+3} = 10^{54}\cdot\left(1-\frac{3}{10^6+3}\right),$$

$$-10^{54}\cdot\frac{3}{10^6+3} = -10^{48}\cdot\frac{3\cdot 10^6}{10^6+3} = -10^{48}\left(3-\frac{3^2}{10^6+3}\right),$$

$$10^{48}\cdot\frac{3^2}{10^6+3} = 10^{42}\cdot\frac{3^2\cdot 10^6}{10^6+3} = 10^{42}\left(3^2-\frac{3^3}{10^6+3}\right),$$

$$\cdots$$

$$-10^6\cdot\frac{3^9}{10^6+3} = -\frac{3^9\cdot 10^6}{10^6+3} = -3^9+\frac{3^{10}}{10^6+3},$$

所以

$$a = 10^{54}-3\cdot 10^{48}+3^2\cdot 10^{42}-\cdots+3^8\cdot 10^6-3^9+\frac{3^{10}}{10^6+3}.$$

因为 $3^{10}=9^5<10^6<10^6+3$，所以 $0<3^{10}/(10^6+3)<1$.

又显然 $a>0$, 因此

$$\begin{aligned}[a] &= 10^{54}-3\cdot 10^{48}+3^2\cdot 10^{42}-\cdots+3^8\cdot 10^6-3^9\\ &= 10M-3^9\equiv -3^9\equiv -3\equiv 7 \pmod{10},\end{aligned}$$

式中 $M\in\mathbb{N}$, 即 a 的个位数字是 7.

解法 3 记 $a=10^{60}/(10^6+3)$. 令 $b=10^6+3$, 则

$$\begin{aligned}a &= (b-3)^{10}/b = \sum_{j=0}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}b^j3^{10-j}\Big/b\\ &= \sum_{j=1}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}b^{j-1}3^{10-j}+3^{10}/b.\end{aligned}$$

因为 $3^{10}<b$, 所以 $0<3^{10}/b<1$. 又 $a>0$, 且 $b\equiv 3 \pmod{10}$, 所以

$$\begin{aligned}[a] &= \sum_{j=1}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}b^{j-1}3^{10-j}\\ &\equiv \sum_{j=1}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}3^{j-1}3^{10-j}\\ &\equiv \sum_{j=1}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}3^9\equiv -3^9\equiv -3\equiv 7 \pmod{10},\end{aligned}$$

其中利用了 $0=(1-1)^{10}=\sum_{j=0}^{10}(-1)^{10-j}\binom{10}{j}$. 因此 a 的个位数字是 7.

解法 4 记 $a=10^{60}/(10^6+3)$. 由多项式除法知

$$x^9=(x+3)f(x)+c,$$

其中 $f(x)$ 为 x 的八次整系数多项式， c 为常数， $c=(-3)^9=-3^9$. 所以

$$\begin{aligned} x^{10} &= x(x+3)f(x)+cx, \\ x^{10}/(x+3) &= xf(x)+cx/(x+3)=xf(x)+c-3c/(x+3). \end{aligned}$$

令 $x=10^6$, 则 $-3c/(x+3)=3^{10}/(10^6+3)\in(0,1)$, 又 $a>0$, 所以

$$\begin{aligned} [a] &= [10^{60}/(10^6+3)]=[x^{10}/(x+3)] \\ &= xf(x)+c=10^6\cdot f(x^6)-3^9 \\ &\equiv -3^9\equiv -3\equiv 7 \pmod{10}, \end{aligned}$$

即 a 的个位数字是 7.

8.1.2 在平面上给定 $n\ (\geq 2)$ 个不同点. 试证: 唯一存在一个面积最小的闭圆盘, 将这 n 个点盖住.

分析 记给定的 n 个点的集合为 $S_n=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$. 设 $O\in\mathbb{R}^2$, 记 $|\overline{OP_j}|=r_j$ (线段 $\overline{OP_j}$ 的长度), $j=1,2,\ldots,n$. 显然, 以 O 为圆心, $\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j$ 为半径的闭圆盘 $B(O,\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j)$ 包含 S_n. 另一方面, 若 $B\subset\mathbb{R}^2$ 为包含 S_n 的一个闭圆盘, 圆心为 O, 则必有 $B\supset B(O,\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j)$. 即, $B(O,\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j)$ 为包含 S_n 的以 O 为圆心的闭圆盘中的最小者. 因此, 集合 $\left\{B(O,\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j)\ \middle|\ O\in\mathbb{R}^2\right\}$ 中的最小者 (若存在的话) 即为包含 S_n 的最小的闭圆盘. 由此导出下述证明.

证明 记给定的 n 个点的集合为 $S_n=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$. 为叙述方便起见, 先引进两个定义. 如果 $S_n\subset B$, 其中 $B\subset\mathbb{R}^2$ 为闭圆盘, 则称 B 为 S_n 的一个包容圆. S_n 的包容圆中面积最小者称为 S_n 的最小包容圆. 本题即要证 S_n 的最小包容圆的存在性和唯一性.

存在性. 对 $x\in\mathbb{R}^2$, 记 $r_j(x)=\rho(x,P_j)$, $j=1,2,\ldots,n$, 这里 $\rho(x,y)$ 表示 $x,y\in\mathbb{R}^2$ 的 Euclid 距离. 记 $r(x)=\max\limits_{1\leq j\leq n} r_j(x)$. 显然, $r_j(x)\ (j=1,2,\ldots,n)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数. 因而 $r(x)$ 作为有限个连续函数的最大值函数亦为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数.

显然, 圆盘 $B(x,r(x))$ 为 S_n 的以 x 为圆心的包容圆中的最小者. 因而, 若 $\left\{B(x,r(x))\ \middle|\ x\in\mathbb{R}^2\right\}$ 中有最小者, 则其必为 S_n 的最小包容圆.

由显然的事实 $\lim_{x\to\infty} r(x)=+\infty$ 及 $r(x)$ 的连续性知，存在 $x^{(0)}\in\mathbb{R}^2$，使 $r(x^{(0)})=\min_{x\in\mathbb{R}^2} r(x)$. 由 $|S_n|=n\ge 2$ 得 $r_0\equiv r(x^{(0)})>0$. 这样，$B(x^{(0)},r_0)$ 即为 S_n 的最小包容圆.

唯一性. 设 $B(x^{(0)},r_0)\supset S_n$, $B(\overline{x}^{(0)},r_0)\supset S_n$，为 S_n 的两个最小包容圆，其中 $x^{(0)}\neq\overline{x}^{(0)}$. 则 $S_n\subset B(x^{(0)},r_0)\cap B(\overline{x}^{(0)},r_0)$. 记 $B(x^{(0)},r_0)$ 的边界与 $B(\overline{x}^{(0)},r_0)$ 的边界之交集为 $\{Q_1,Q_2\}$ (见图 8.1.2 (a))，则有 $B(O,|\overline{OQ_1}|)\supset B(x^{(0)},r_0)\cap B(\overline{x}^{(0)},r_0)\supset S_n$，其中 O 为线段 $\overline{x^{(0)}\overline{x}^{(0)}}$ 的中点. 然而 $|\overline{OQ_1}|<r_0$，这与 r_0 的最小性矛盾. 因而唯一性得证.

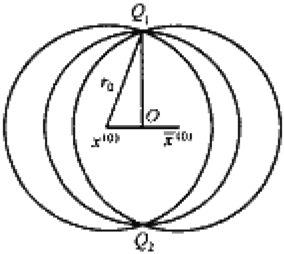


图 8.1.2 (a)

说明 1 这是一个源于实际的问题：某项工作需要用圆盘去覆盖位于平面上的有限个点，并且要求圆盘面积尽可能小. 在实践中感到此工作总是能够完成的，即具有题中所要证明的存在性和唯一性. 然而，这个面积最小的圆的位置、大小与这有限个点之间有什么具体的关系呢？实践提示我们，这个圆或以这些点中的某两点的连线为其直径，或为这些点中某 3 点构成的非钝角三角形的外接圆. 事实上我们可以证明

命题 S_n 的最小包容圆或以 S_n 中的两个点的连线为其直径，或者，其边界为 S_n 中 3 个点构成的非钝角三角形的外接圆.

命题的证明 从试题 8.1.2 的证明 (函数 $r(x)$ 及正数 r_0 的定义) 可知，若记 B 为 S_n 的最小包容圆，其边界记为 C，圆心记为 O，半径为 r_0，则 C 至少通过 S_n 中的一个点. 因此不妨设 $0\le r_1\le r_2\le\cdots\le r_n=r_0$，其中 $r_j=\rho(O,P_j)$, $j=1,2,\ldots,n$.

我们断言，必有 $r_{n-1}=r_n$. 否则，若有 $r_{n-1}<r_n$，则可在线段 $\overline{P_nO}$ 上取点 O'，使 $|\overline{OO'}|=(r_n-r_{n-1})/2$. 显然，圆盘 $B(O',r_n')$ 为 S_n 的包容圆，其中 $r_n'=|\overline{P_nO'}|=r_n-|\overline{OO'}|=r_n-((r_n-r_{n-1})/2)=(r_n+r_{n-1})/2=r_{n-1}+((r_n-r_{n-1})/2)=r_{n-1}+|\overline{OO'}|$ (见图 8.1.2(b)). 但 $r_n'<r_n=r_0$，与 B 为 S_n 的最小包容圆矛盾. 因此 $r_{n-1}=r_n$.

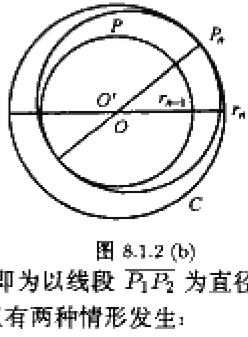


图 8.1.2 (b)

因此，当 $n=2$ 时，$S_n=S_2$ 的最小包容圆即为以线段 $\overline{P_1P_2}$ 为直径的圆盘. (这也是一个显然的事实.) 当 $n\ge 3$ 时，只有两种情形发生：

(i) $r_{n-2} < r_{n-1} = r_n = r_0$;

(ii) $0 \le r_1 \le \cdots < r_{n-k} = r_{n-k+1} = \cdots = r_{n-2} = r_{n-1} = r_n = r_0$, 其中 $k \ge 2$.

在情形 (i), 我们断言线段 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 为 C 的直径.

设不然, 即 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 不是 C 的直径, 记 P 为 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 的中点, Q 为 $\overline{PO}$ 的延长线与圆 $\{Q' \in \mathbb{R}^2 \mid |\overline{OQ'}| = r_{n-2}\}$ 的交点, 在 $\overline{OP}$ 上取点 O', 使 $|\overline{OO'}| = \min(\overline{OP}, (r_n - r_{n-2})/2)$. 则 $B(O', r'_n) \supset S_n$, 其中 $r'_n = |\overline{O'P_n}| > |\overline{OP_n}| - |\overline{OO'}| \ge r_n - ((r_n - r_{n-2})/2) = r_{n-2} + ((r_n - r_{n-2})/2) = |\overline{OQ}| + |\overline{OO'}|$ (见图 8.1.2(c)). 然而 $r'_n < r_n = r_0$, 与 B 为 S_n 的最小包容圆矛盾. 因此当 $r_{n-2} < r_{n-1} = r_n = r_0$ 时 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 为 C 的直径.

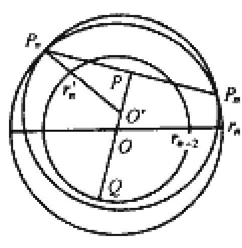


图 8.1.2 (c)

在情形 (ii) 我们断言, 存在 $i, j, l : n-k \le i < j < l \le n$, 使 $\triangle P_iP_jP_l$ 为直角三角形或锐角三角形. 因而圆 C 为以 S_n 中某三点为顶点的非钝角三角形的外接圆.

事实上, 若所有 $\triangle P_iP_jP_l$ $n-k \le i < j < l \le n$ 都为钝角三角形, 则 $P_{n-k}, \ldots, P_n$ 位于 C 上一段弧度小于 π 的弧上. 不妨设 P_{n-1}, P_n 为这段弧的两个端点, 则如情形 (i) 的证明中所述, 可在 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 的中垂线上取点 O' (以 r_{n-k-1} 代替 (i) 中的 r_{n-2}), 及 $r'_n = |\overline{O'P_n}|$, 这使得 $B(O', r'_n) \supset S_n$, 且 $r'_n < r_n = r_0$, 这与 B 为 S_n 的最小包容圆矛盾. 命题证毕.

由此命题, 可编出根据 n 个点求出最小包容圆圆心及半径的程序, 在电子计算机上实现, 从而摆脱手工操作 (用圆盘去试, 调整, 得其近似位置) 了.

说明 2 试题 8.1.2 所要求证明的 S_n 的最小包容圆的唯一性并不是平凡的. 即, 如果所论的圆盘不是 Euclid 距离意义下的圆盘, 而是赋以一般的距离的 $\mathbb{R}^2$ 中的 "圆" 盘, 则 S_n 的最小包容 "圆" 不一定是唯一的.

例如, 对于 $x = (u_x, v_x) \in \mathbb{R}^2$, $y = (u_y, v_y) \in \mathbb{R}^2$, 定义 x, y 之间的距离 $\widetilde{\rho}(x, y)$ 如下:

$$\widetilde{\rho}(x, y) = \max(|u_x - u_y|, |v_x - v_y|)$$

(容易验证, $\widetilde{\rho}$ 确为 $\mathbb{R}^2$ 中的一种距离). 在赋以这种距离的平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 以 $y^{(0)}$ 为 "圆" 心, $\widetilde{r}_0$ 为 "半径" 的 "圆" 盘 $\widetilde{B}(y^{(0)}, \widetilde{r}_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \widetilde{\rho}(x, y^{(0)}) \le \widetilde{r}_0\}$ 为以 $y^{(0)}$ 为中心的正方形, 其边界平行于 $u-O-v$ 坐标系中的坐标轴, 边长为 $2\widetilde{r}_0$.

现令 $n=2$, $S_n=S_2=\{P_1,P_2\}$, 其中 $P_1=(-1,0)$, $P_2=(1,0)$. 易知, S_2 的最小包容"圆"的"半径"为 1, "圆"心 $y^{(0)}=(0,v)$, 其中 v 可为闭区间 $[-1,1]$ 中的任一数. 因而, 此时 S_2 的最小包容"圆"有无穷多个.

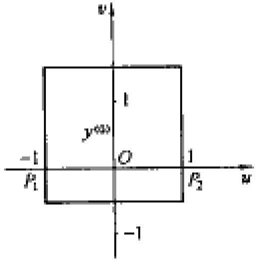


图 8.1.2 (d)

说明 3 可把试题 8.1.2 条件中的 n 个点推广为无限有界集合, 即有

命题 设 $S\subset\mathbb{R}^2$ 为一有界集合, 则 S 的最小包容圆存在且唯一.

证明 存在性. 以 $\overline{S}$ 表示 S 的闭包, 则有闭圆盘 $B\supset S$, 当且仅当 $B\supset\overline{S}$. 因此, 不妨设 S 为闭集. 又由于 S 为有界集, 因而 S 为紧集. 对于任意固定的 $x\in\mathbb{R}^2$, 作为 y 的函数, $\rho(x,y)$ 为 S 上的连续函数, 它在 S 上能达到其最大值. 因此可定义 $r(x)=\max\limits_{y\in S}\rho(x,y)$. 我们断言 $r\in C^0(\mathbb{R}^2)$. 事实上, 对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$, 令 $x_1\in B(x_0,\varepsilon)$, 则存在 $y_j\in S$, 使 $r(x_j)=\rho(x_j,y_j)$, $j=0,1$. 因而 $r(x_1)=\rho(x_1,y_1)\le\rho(x_0,y_1)+\rho(x_0,x_1)\le\rho(x_0,y_0)+\rho(x_0,x_1)=r(x_0)+\varepsilon$. 同样可得 $r(x_0)\le r(x_1)+\varepsilon$. 因而 $|r(x_0)-r(x_1)|\le\varepsilon$. 即 $r\in C^0(\mathbb{R}^2)$.

又由于 $\lim\limits_{x\to\infty}r(x)=+\infty$, 所以存在 $x_0\in\mathbb{R}^2$, 使得 $r(x_0)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2}r(x)=r_0$. 由试题 8.1.2 证明中的推理知 $B(x_0,r_0)$ 为 S 的最小包容圆.

唯一性. 见试题 8.1.2 的唯一性证明.

命题证毕.

说明 4 对于一般的有界闭集 S, 也有类似于说明 1 中的命题, 即

命题 设 $S\subset\mathbb{R}^2$ 为有界闭 (无限) 点集, 则 S 的最小包容圆 B 的边界 C 与 S 至少有两个交点. 并且, 当 $C\cap S=\{P_1,P_2\}$ 时, 线段 $\overline{P_1P_2}$ 即为 C 的直径; 当 $C\cap S$ 多于两点时, 在 $C\cap S$ 中可选出 3 点 P_1,P_2,P_3, 使得 $\triangle P_1P_2P_3$ 为非钝角三角形.

证明 由说明 3 中命题的证明可知 $C\cap S\neq\emptyset$. 设 $C\cap S=\{P\}$. 记 r_0 为 B 的半径, $\mathring{B}(P,r_0/2)$ 为 $B(P,r_0/2)$ 的内点集, 则 $B-\mathring{B}(P,r_0/2)$ 为闭集. 显然

$$\tilde{S}=\left(B-\mathring{B}\left(P,\frac{r_0}{2}\right)\right)\cap S\neq\emptyset,$$

且为有界闭集. 记 $B(P,r_0/2)$ 的边界与 C 的交点为 Q_1,Q_2. 则 $r'\equiv\max\limits_{x\in\tilde{S}}\rho(0,x)<r_0$ (因为 $\rho(O,x)$ 在 $\tilde{S}$ 上达到最大值, 且 $C\cap\tilde{S}=\emptyset$), 且 $r'>0$ (否则 $\tilde{S}=\{O\}$,

此时 $\triangle Q_1OQ_2$ 的外接圆即圈住了 S，而此圆的面积小于 B 的面积，与 B 的最小性矛盾）．因此 $S \subset B(O,r') \cup (B(P,r_0/2) \cap B)$．在 $\overline{OP}$ 上取 O'，使 $|\overline{OO'}| = (r_0 - r')/2$．设 $\overline{PO}$ 的延长线与 $B(O,r')$ 的边界交于点 Q（见图 8.1.2 (e)），则 $|\overline{O'Q}| = |\overline{O'P}| = r_0 - ((r_0 - r')/2) = |\overline{OQ_1}| - |\overline{OO'}| < |\overline{O'Q_1}| = |\overline{O'Q_2}|$，因此 $B(O',|\overline{O'Q_1}|) \supset B(0,r') \cup (B(P,r_0/2) \cap B)$，$B(O',|\overline{O'Q_1}|) \supset S$．但 $|\overline{O'Q_1}| < |\overline{OQ_1}| = r_0$，这与 r_0 的最小性矛盾．因此 $C \cap S$ 至少有两个点．

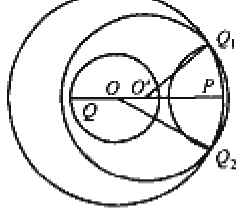


图 8.1.2 (e)

现设 $C \cap S = \{P_1, P_2\}$，但 $\overline{P_1P_2}$ 不是 B 的直径；或设 $C \cap S$ 多于两点，但 $C \cap S$ 中不存在可作为非钝角三角形顶点的三个点．在这两种情形，可设 $C \cap S$ 被包含在以 P_1, P_2 为端点的一段弧上，这段弧的弧度小于 π．把这段弧向外扩展一些，成为弧 $\widehat{Q_1Q_2}$，但仍使 $\widehat{Q_1Q_2} < \pi$（见图 8.1.2(f)）．集合

$$B - \left[\text{扇形}\, Q_1OQ_2 - \mathring{B}\left(0, \frac{r_0}{2}\right)\right]$$

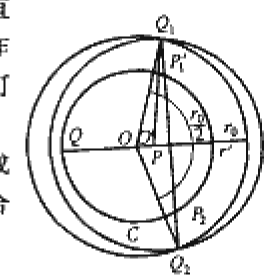


图 8.1.2 (f)

的闭包与 S 的交集 $\tilde{S}(\neq \emptyset)$ 是有界闭集，且在 $\tilde{S}$ 中无点 x 使 $\rho(O,x) \geq r_0$，因此 $r' \equiv \max\limits_{\tilde{S}} \rho(O,x) < r_0$．如上一段中所述，可设 $r' > 0$．又设 $\overline{Q_1Q_2}$ 的垂直平分线与 $\widehat{Q_1Q_2}$ 交于点 P，在 $\overline{OP}$ 上取点 O'，使

$$|\overline{OO'}| = \min\left(|\overline{OP}|, \frac{1}{2}(r_0 - r')\right),$$

则由说明 1 中命题的证明所示，有

$$B(O',|\overline{O'Q_1}|) \supset B(O,r') \cup \left[\text{扇形}\, Q_1OQ_2 - \mathring{B}\left(0, \frac{r_0}{2}\right)\right] \supset S.$$

但 $|\overline{O'Q_1}| < |\overline{OQ_1}| = r_0$，与 r_0 的最小性矛盾．因而本段开始时所作的假设不成立，即，命题得证．

显然，若 S 不是闭集，则本命题不成立．

8.1.3 设 f 为上半平面内的有界单叶解析映射，记 b 为其上界．任给

实数 a, 记带形

$$D_a = \left\{ z = x + iy \;\middle|\; a \le x \le a + 4,\, b^2 \le y \right\}.$$

试证： $f(D_a)$ 的面积不超过 1.

证明 将 $f(z)$ 之实虚部分开，记作

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

于是 $f(D_a)$ 之面积为

$$\iint_{f(D_a)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

记 f 之 Jacobian 为 J, 由于 f 为单叶函数，所以 f 为一一对应，因此 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 为变数变换，于是

$$\iint_{f(D_a)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\int_{D_a} |J|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right| = |f'(z)|^2,$$

即

$$\iint_{f(D_a)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D_a} |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

在上半平面中任取一点 z_0, 考虑上半平面到单位圆内之映射

$$w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \qquad z = \frac{z_0 - \overline{z_0}w}{1 - w}.$$

记 $F(w) = f(z) = f\left((z_0 - \overline{z_0}w)/(1 - w)\right)$, 则 $F(w)$ 在单位圆 $|w| < 1$ 内解析，且 $|F(w)| \le b$. 任取 $0 < r < 1$, 由 Cauchy 积分公式，有

$$F'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

于是

$$|F'(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=r} \frac{b}{|\zeta|^2}\,|\mathrm{d}\zeta| \le \frac{b}{r}.$$

令 $r \to 1$, 便证明了

$$|F'(0)| \le b.$$

然而 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}w=(z_0-\overline{z_0})/(1-w)^2$, 所以

$$F'(w)=\frac{\mathrm{d}F(w)}{\mathrm{d}w}=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}=f'(z)\frac{z-\overline{z_0}}{(1-w)^2}.$$

因此

$$F'(0)=(z_0-\overline{z_0})f'(z_0).$$

这证明了

$$|f'(z_0)|\le\frac{b}{|z_0-\overline{z_0}|}.$$

代入有

$$\begin{aligned}&\iint_{f(D_a)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D_a}|f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\iint_{D_a}\frac{b^2}{4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\ \frac{b^2}{4}\int_a^{a+4}\mathrm{d}x\int_{b^2}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\frac{b^2}{4}\int_a^{a+4}\mathrm{d}x\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{b^2}^{+\infty}\\=&\ \frac{1}{4}\int_a^{a+4}\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

证毕.

8.1.4 在 Hilbert 空间

$$l^2=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots)\ \Bigg|\ x_j\in\mathbb{C},\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2<+\infty\right\}$$

中给定线性算子 A : $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots)$, 其中 $\mathbb{C}$ 中序列 $\{a_j\}$ 为有界序列. 试分别给出且证明下面两种情形的充分且必要条件 (加在序列 $\{a_j\}$ 上):

(a) 算子 A 为紧算子;

(b) 算子 A 有闭值域.

分析 要找出充要条件可从几个途径考虑:

(i) 先设法找出一个或几个必要条件, 再考察它们是否充分. 如不充分, 还缺些什么?

(ii) 先设法找出一充分条件, 考察其是否必要. 如不必要, 多了些什么?

(iii) 把一般情形中的充要条件在所论情形中具体化.

解 (a) 为了下文叙述方便起见, 先证一引理.

引理 $\|A\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\}\equiv\mathcal{A}$.

引理的证明 对任意 $x\in l^2$, 有

$$\|Ax\| = \|(a_1x_1, a_2x_2, \ldots)\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_jx_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2\right)^{1/2} = \mathcal{A}\|x\|,$$

因此，$\|A\| \le \mathcal{A}$.

另一方面，若有 $n \in \mathbb{N}$, 使 $|a_n| = \mathcal{A}$, 则 $\|A\| = \|A\| \cdot \|e_n\| \ge \|Ae_n\| = \|(0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots)\| = |a_n| = \mathcal{A}$, 其中， $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ 在第 j 位上是 1, 其余为 0;

若不存在使 $|a_n| = \mathcal{A}$ 的 $n \in \mathbb{N}$, 则由 $\mathcal{A}$ 的定义，存在 $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$, $n_j \to \infty$, 使 $\lim\limits_{j\to\infty}|a_{n_j}| = \mathcal{A}$. 则

$$\|A\| = \|A\| \cdot \|e_{n_j}\| \ge \|Ae_{n_j}\| = \|(0, \ldots, 0, a_{n_j}, 0, 0, \ldots)\| = |a_{n_j}|,$$

令 $j \to \infty$, 得 $\|A\| \ge \mathcal{A}$. 因此在所有情形有 $\|A\| \ge \mathcal{A}$. 综上所述，有 $\|A\| = \mathcal{A} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\}$.

解法 1　由定义知

$$A: l^2 \to l^2 \text{ 为紧算子} \iff \text{对任意有界集 } S \subset l^2,$$
$$AS = \{\, Ax \mid x \in S \,\} \subset l^2 \text{ 为紧集}.$$

由 l^2 中紧集的判别条件知

$$\begin{aligned} &AS \subset l^2 \text{ 为紧集} \iff AS \text{ 为有界集，并且} \\ &\text{对 } \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{使得对 } \forall x \in S, \text{有 } \|A_Nx\| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $A_Nx = (0, \ldots, 0, a_{N+1}x_{N+1}, a_{N+2}x_{N+2}, \ldots)$.

由引理及 $\{a_n\}$ 的有界性，知 A 为有界算子，因此 AS 为有界集. 所以

$$AS \subset l^2 \text{ 为紧集} \iff (1) \text{ 成立}.$$

但对 $\forall x \in S$, $\|A_Nx\| \le \|A_N\| \cdot \|x\| \le \|A_N\| \cdot M = \sup\limits_{j\ge N+1}\{|a_j|\} \cdot M$, 其中 M 为 S 的界. 因此，只要

$$\text{对 } \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{使得 } \sup_{j\ge N+1}\{|a_j|\} < \frac{\varepsilon}{M}, \tag{2}$$

即有 $\|A_Nx\| < \varepsilon, \forall x \in S$. 显然，(2) $\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 时，AS 为紧集，即 A 为紧算子.

反之，设 A 为紧算子. 令 $S = \{\, x \in l^2 \mid \|x\| \le 1 \,\}$. 由 (1), 对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall x \in S$, 有 $\|A_Nx\| < \varepsilon$. 由算子范数的定义知，当固定 ε 和 N 之后，对任意 $\delta > 0$, 存在 $x^{(0)} \in S$, $\|x^{(0)}\| = 1$, 使得 $\|A_Nx^{(0)}\| > \|A_N\| - \delta$.

因而 $\|A_N\| - \delta < \varepsilon$. 由 δ 的任意性得 $\|A_N\| \le \varepsilon$. 即 $\sup\limits_{j \ge N+1} \{|a_j|\} \le \varepsilon$. 亦即 (2) 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

综上所述, A 是紧算子 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解法 2 由于从 Banach 空间到其自身的紧线性算子是"几乎有限维的"(因而对 Hilbert 空间亦真), 即知

$A: l^2 \to l^2$ 是紧算子 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 可确定 l^2 的有限维子空间 X_n 以及有界线性算子 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$, 使得 $A = A^{(1)} + A^{(2)}$, 其中 $A^{(1)}$ 的值域在 X_n 中, 而 $\|A^{(2)}\| < \varepsilon$.

显然,

$$\begin{aligned} Ax &= (a_1x_1, a_2x_2, \ldots) \\ &= (a_1x_1, \ldots, a_nx_n, 0, 0, \ldots) + (0, \ldots, 0, a_{n+1}x_{n+1}, a_{n+2}x_{n+2}, \ldots) \\ &\equiv A^{(n)}x + A_nx, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A^{(n)}x &= (a_1x_1, \ldots, a_nx_n, 0, 0 \ldots), \\ A_nx &= (0, \ldots, 0, a_{n+1}x_{n+1}, \ldots). \end{aligned}$$

令 $X_n = \{ x \in l^2 \mid x_j = 0, j \ge n+1 \}$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset l^2$ 为 l^2 的 n 维子空间, 且对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 及 $\forall x \in l^2$, 有 $A^{(n)}x \in X_n$. 因此, 如对 $\forall \varepsilon > 0$, 能取 $n \in \mathbb{N}$, 使 $\|A_n\| < \varepsilon$, 则 A 为紧算子. 由引理, $\|A_n\| = \sup\limits_{j \ge n+1} \{|a_j|\}$, 因此上述条件即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 时 A 为紧算子.

反之, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 不成立, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $n_j \to \infty$, 使得 $|a_{n_j}| > \varepsilon_0$, $j = 1, 2, \ldots$.

取有界集 $\{ e_{n_j} \mid j = 1, 2, \ldots \} \subset l^2$. 由于对 $k > j$, 有

$$\begin{aligned} \|Ae_{n_j} - Ae_{n_k}\| &= \|(0, \ldots, 0, a_{n_j}, 0, \cdot, 0, -a_{n_k}, 0, 0, \ldots)\| \\ &= \left(|a_{n_j}|^2 + |a_{n_k}|^2\right)^{1/2} > \left(2\varepsilon_0^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}\varepsilon_0 > 0, \end{aligned}$$

所以 $\{Ae_{n_j}\}$ 中无收敛子列. 因此 A 不紧.

综上所述, A 为紧算子 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) **解法 1** 记算子 A 的值域为 $R(A)$. 由定义,

$$\begin{aligned} R(A)\text{ 闭} \Longleftrightarrow &\ \forall x^{(n)} \in l^2, \text{若 } y^{(n)} = Ax^{(n)} \to y^{(0)} \in l^2, \\ &\text{则 } \exists x^{(0)} \in l^2, \text{使 } Ax^{(0)} = y^{(0)}. \end{aligned} \tag{3}$$

记 $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\ldots\right)$, $n=0,1,2,\ldots$; $y^{(0)}=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\ldots)$, 则

$$Ax^{(0)}=y^{(0)}\iff a_jx_j^{(0)}=y_j^{(0)},\qquad j=1,2,\ldots. \tag{4}$$

记 $J=\left\{j\in\mathbb{N}\ \middle|\ a_j\neq 0\right\}$, 为使 (3) 成立，当 $j\notin J$ 时可取 $x_j^{(0)}=0$; 而当 $j\in J$ 时由 (4) 知必须有 $x_j^{(0)}=y_j^{(0)}/a_j$. 因而,

$$x^{(0)}\in l^2\iff\sum_{j\in J}|y_j^{(0)}/a_j|^2<+\infty.$$

这样，若存在 $I=\{k_i\}\subset J$, $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=\infty$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}a_{k_i}=0$, 则可取得 $x^{(n)}\in l^2\,(n\in\mathbb{N})$ 及 $y^{(0)}\in l^2$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}Ax^{(n)}=y^{(0)}$, 而 $x^{(0)}\notin l^2$, 其中 $j\notin J$ 时 $x_j^{(0)}=0$; $j\in J$ 时 $x_j^{(0)}=y_j^{(0)}/a_j$. (例见下.) 即若存在 $I=\{k_i\}\subset J$, $\lim\limits_{i\to\infty}k_i=\infty$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}a_{k_i}=0$, 则 $R(A)$ 不闭. 因而，若 $R(A)$ 闭，则

$$\exists\varepsilon>0,\text{使得当}\,j\in J\,\text{时}\,|a_j|>\varepsilon. \tag{5}$$

例　设 $I=\left\{k_i\ \middle|\ i\in\mathbb{N}\right\}$ 为无限集，并设 $a_{k_i}\neq 0,\forall k_i\in I$, 以及 $\lim\limits_{i\to\infty}a_{k_i}=0$. 不妨设 $|a_{k_i}|<1/i$, $k_i\in I$. 记 $I_n=I\cap\{1,2,\ldots,n\}$. 令

$$x_j^{(n)}=\begin{cases}1, & j\in I_n,\\ 0, & j\notin I_n.\end{cases}$$

显然 $x^{(n)}\in l^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, 并且

$$Ax^{(n)}=\sum_{j\in I_n}a_je_j\to\sum_{j\in I}a_je_j\equiv y^{(0)},$$

即当 $j\in I$ 时 $y_j^{(0)}=a_j$; $j\notin I$ 时 $y_j^{(0)}=0$. 因此若 $Ax^{(0)}=y^{(0)}$, 则当 $j\in I$ 时必须有 $x_j^{(0)}=y_j^{(0)}/a_j=1$. 因而

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(0)}|^2\geq\sum_{j\in I}|x_j^{(0)}|^2=\sum_{j\in I}1=+\infty,$$

即 $x^{(0)}\notin l^2$. 所以不存在 $x^{(0)}\in l^2$, 使 $Ax^{(0)}=y^{(0)}$.

反之，设 (5) 成立，并设 $Ax^{(n)}\to y^{(0)}$, 其中 $x^{(n)}\in l^2$. 令 $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots\right)$, 其中当 $j\notin J$ 时 $x_j^{(0)}=0$, $j\in J$ 时 $x_j^{(0)}=y_j^{(0)}/a_j$. 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j^{(0)}\right|^2&=\sum_{j\in J}\left|x_j^{(0)}\right|^2=\sum_{j\in J}\left|y_j^{(0)}/a_j\right|^2\\&\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j\in J}\left|y_j^{(0)}\right|^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\|y^{(0)}\|^2<+\infty,\end{aligned}$$

因而 $x^{(0)} \in l^2$, 并且显然有 $Ax^{(0)} = y^{(0)}$, 因此 $y^{(0)} \in R(A)$. 即 A 有闭值域.

综上所述, A 有闭值域 $\Longleftrightarrow \{1/a_j \mid a_j \neq 0\}$ 有界.

解法 2 设 $X = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2 \mid 当 j \notin J 时 x_j = 0\}$, 则 X 为 l^2 的闭子空间, 并且 $\widetilde{A} = A|_X$ 是从 X 到 $R(A)$ 上一对一的有界线性算子, 这里 $A|_X$ 表示算子 A 在 X 上的限制. 因而 $R(\widetilde{A}) = R(A)$.

现设 $R(A)$ 为闭集, 即 $R(A) = R(\widetilde{A})$ 为 Banach 空间. 又, X 亦为 Banach 空间. 根据 Banach 的可逆定理 (若从 Banach 空间 B 到 Banach 空间 B_1 的有界线性算子 T 将 B 一对一地映到 B_1 全体, 那么逆算子 T^{-1} 是有界的), $\widetilde{A}^{-1}$ 是有界算子. 因而, 当 $j \in J$ 时, 有

$$\frac{1}{|a_j|} = \|e_j/a_j\| = \|\widetilde{A}^{-1}e_j\| \leq \|\widetilde{A}^{-1}\| \cdot \|e_j\| = \|\widetilde{A}^{-1}\|,$$

即 $\{1/a_j \mid j \in J\}$ 有界.

反之, 设对任意 $j \in J$, 有 $1/|a_j| \leq M$, $M > 0$ 为一常数. 显然, 若 $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in R(A)$, 使得 $\widetilde{A}^{-1}(y) = x$, 则当 $j \notin J$ 时 $x_j = 0$; $j \in J$ 时 $x_j = y_j/a_j$. 因此

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}^{-1}(y)\| &= \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j\in J} |x_j|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j\in J} |y_j/a_j|^2\right)^{1/2} \leq M\left(\sum_{j\in J} |y_j|^2\right)^{1/2} \\
&\leq M\left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\right)^{1/2} = M\|y\|,
\end{aligned}$$

即算子 $\widetilde{A}^{-1}$ 为有界算子. 现设 $y^{(n)} \in R(A) = R(\widetilde{A})$, $y^{(n)} \to y^{(0)}$. 则存在 $x^{(n)} \in X$, 使得 $\widetilde{A}(x^{(n)}) = y^{(n)}$, 即 $x^{(n)} = \widetilde{A}^{-1}(y^{(n)})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 由 $\{y^{(n)}\}$ 为 Cauchy 列及 $\widetilde{A}^{-1}$ 为有界算子, 知 $\{\widetilde{A}^{-1}y^{(n)}\}$ 为 Cauchy 列; 又 X 为 Banach 空间, 所以存在 $x^{(0)} \in X$, 使得 $x^{(n)} = \widetilde{A}^{-1}(y^{(n)}) \to x^{(0)}$. 所以

$$\widetilde{A}(x^{(0)}) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}\widetilde{A}^{-1}(y^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} y^{(n)} = y^{(0)},$$

即 $y^{(0)} \in R(\widetilde{A}) = R(A)$. 所以 $R(A)$ 闭.

综上所述, A 有闭值域 $\Longleftrightarrow \{1/a_j \mid a_j \neq 0\}$ 有界.

说明 为了阐明充要条件是如何得到的, (a) 的两个解法的第一部分 (推导充分性) 包含了如何导致某个充分性条件的分析. 这些分析或是从定义出发, 或是从已知的定理出发. 类似地, (b) 的两个解法的第一部分 (推导必要性) 包含了如何导致某个必要性条件的分析.

8.1.5 设 (R,δ) 为 Euclid 整环，且 δ 适合条件

$$\delta(a+b)\le\max(\delta(a),\delta(b)),\quad \forall a,b\in R.$$

试证：R 或为一域，或为一域上一元多项式环.

(注：环 R 称为整环，如果 R 是含幺元，不含零因子的交换环.

整环 R 称为 Euclid 整环，如果 R 中每个元素 a 都对应一个非负整数 $\delta(a)$，使得

(a) $\delta(a)=0$ 当且仅当 $a=0$，又 $\delta\neq 0$；

(b) $\delta(ab)=\delta(a)\delta(b)$，$\forall a,b\in R$；

(c) 任取 $a,b\in R$，$b\neq 0$，存在 $q,r\in R$，使得

$$a=qb+r,$$

其中 $\delta(r)<\delta(b)$.)

证明 设 (R,δ) 为适合题目要求的 Euclid 整环. R 之子集

$$\mathcal{F}=\left\{a\in R\ \middle|\ \delta(a)\le 1\right\}$$

必为一域. 事实上，我们先证：a 为 R 中之单位当且仅当 $\delta(a)=1$. 若 a 为单位，于是存在 $b\in R$，且 $ab=1$. 今 $1^2=1$，故 $\delta(1)=\delta(1)^2$，所以 $\delta(1)=1$ 或 $\delta(1)=0$. 由 $1\neq 0$ 可知 $\delta(1)=1$. 于是

$$1=\delta(1)=\delta(ab)=\delta(a)\delta(b)$$

但是 $\delta(a),\delta(b)$ 为非负整数，这推出 $\delta(a)=1$. 反之，任取 $a\in R$，若 $\delta(a)=1$，于是 $a\neq 0$，因此存在 $q,r\in R$，使得 $1=aq+r$，且 $\delta(r)<\delta(a)=1$. 这推出 $\delta(r)=0$，因此 $r=0$. 所以 a 为单位. 至此证明了断言. 于是为了证 $\mathcal{F}$ 为域，由 $0,1\in\mathcal{F}$，且 $\mathcal{F}$ 中非零元为单位，而 $\mathcal{F}\backslash\{0\}$ 由 R 之所有单位构成. 所以只要证 $\mathcal{F}$ 中元在加法及乘法下封闭即可. 事实上，任取 $a,b\in\mathcal{F}$，则由 $\delta(-1)=1$ 有

$$\delta(a-b)\le\max\left(\delta(a),\delta(b)\right)\le 1,$$

且当 $b\neq 0$ 时

$$\delta(ab^{-1})=\delta(a)\delta(b^{-1})\le 1.$$

这证明了 $a-b,\ ab^{-1}\in\mathcal{F}$. 所以证明了 $\mathcal{F}$ 为 R 之子域.

如果 $R=\mathcal{F}$, 则 R 为域; 如果 $R\neq\mathcal{F}$, 我们来证 R 为域 $\mathcal{F}$ 上一元多项式环. 首先, 由 $R\supset\mathcal{F}$ 及 $R\neq\mathcal{F}$ 知, 任取 $y\in R\backslash\mathcal{F}$, 则有 $\delta(y)\geq 2$. 因此在 R 中必存在一个元素 x, 使得 $x\in R\backslash\mathcal{F}$, 且 $\delta(x)\leq\delta(y)$, $\forall y\in R\backslash\mathcal{F}$.

在 R 中任取一元 a, 则有 $a_1,r_1\in R$, 使得

$$a=a_1x+r_1,$$

其中 $\delta(r_1)<\delta(x)$. 由 x 之选取可知 $\delta(r_1)\leq 1$, 即 $r_1\in\mathcal{F}$. 当 $a_1\in\mathcal{F}$ 时, a 为 x 之多项式; 当 $a_1\notin\mathcal{F}$ 时, 由 $\delta(a_1)>1$, $\delta(x)>1$ 可知

$$\begin{aligned}\delta(a_1)&<\delta(a_1)\delta(x)=\delta(a_1x)=\delta(a-r_1)\\&\leq\max(\delta(a),\delta(-r_1))=\delta(a).\end{aligned}$$

对 a_1 同样讨论, 我们有

$$\begin{aligned}a&=a_1x+r_1,\\a_1&=a_2x+r_2,\\&\cdots\end{aligned}$$

其中 $\delta(a)>\delta(a_1)>\cdots$. 由 $\delta(a)$ 为正整数可知必在有限步后得到

$$\begin{aligned}a&=a_1x+r_1,\\a_1&=a_2x+r_2,\\&\cdots\\a_s&=a_{s+1}x+r_{s+1},\end{aligned}$$

使得

$$\delta(a)>\delta(a_1)>\delta(a_2)>\cdots>\delta(a_s)>\delta(a_{s+1})=0,$$

即 $a_{s+1}\in\mathcal{F}$, 又 $r_1,r_2,\ldots\in\mathcal{F}$.

在消去 $a_s,a_{s-1},\ldots,a_1$ 后, 便得到

$$a=b_0x^{s+1}+b_1x^s+\cdots+b_{s+1},$$

其中 $b_0,b_1,\ldots,b_{s+1}\in\mathcal{F}$. 所以为了证明 R 为 x 之多项式环, 只要证明 x 为 $\mathcal{F}$ 上的不定元, 即证明 x 不是 $\mathcal{F}$ 上任何非零多项式之根. 用反证法. 设若不然, 则存在关系

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\qquad a_0\neq 0,$$

其中 $\delta(a_i)\le 1, 0\le i\le n$. 于是 $\delta(a_0)=1$, 且

$$\begin{aligned}\delta(x)^n &= \delta(x^n)=\delta(a_0x^n)=\delta(-a_n-\cdots-a_1x^{n-1})\\ &\le \max\left(\delta(-a_n),\delta(-a_{n-1})\delta(x),\ldots,\delta(-a_1)\delta(x)^{n-1}\right)\\ &\le \delta(x)^{n-1},\end{aligned}$$

这与 $\delta(x)\ge 2$ 矛盾. 所以完全证明了 R 为 $\mathcal{F}$ 上关于不定元 x 之多项式环.

第二试

8.2.1 试求积分方程

$$[f(x)]^3-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad x\ge 0$$

的所有连续函数解.

分析 1 解一个积分方程, 往往先把它化为与其等价的带条件的微分方程, 然后再解此微分方程. 由所给的积分方程即得: 在条件 $f\in C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$ 下, 函数 $[f(x)]^3$ 的导数在 $\overline{\mathbb{R}_+}$ 上处处存在, 且等于 $f(x)$, 并且 $f(0)=0$. 事实上, 原积分方程即等价于带初始条件的微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]^3}{\mathrm{d}x}=f(x), & x\ge 0,\\ f(0)=0.\end{cases}$$

由此能否得到 f' 处处存在, 从而可以用 f, f' 来表示 $(f^3)'$, 继而求出 f 呢? 由微积分的知识知道, $(f^3)'$ 的存在并不能保证 f' 存在. 例如对于 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 有 $[f(x)]^3=x$. 显然 $\mathrm{d}[f(x)]^3/\mathrm{d}x$ 处处存在, 然而 (仅) 当 $x=0$ 时, 即 $f(x)=0$ 时, $f'(x)$ 不存在.

是否可猜想当 $f(x)\neq 0$ 时由 $\mathrm{d}[f(x)]^3/\mathrm{d}x$ 存在可得 $f'(x)$ 存在? 若如此, 由于 $\mathrm{d}[f(x)]^3/\mathrm{d}x=3[f(x)]^2\cdot f'(x)$, 可得 $f'(x)=(1/3)\cdot(\mathrm{d}[f(x)]^3/\mathrm{d}x)\cdot[f(x)]^{-2}=(f(x))^{-1}/3$. 所以对于任何 $x\in\overline{\mathbb{R}_+}$, 或者 $f(x)=0$, 或者 $f(x)\neq 0$, 而 $f'(x)=(f(x))^{-1}/3$. 由于点集 $\left\{x\in\overline{\mathbb{R}_+}\ \middle|\ f(x)\neq 0\right\}$ 是开集, 由开区间组成, 因此在每个这样的开区间上可求出 f, 从而就可得到 $\overline{\mathbb{R}_+}$ 上的 f.

上述猜想是对的. 这可从退到导数的定义以及 $[f(x+h)]^3-[f(x)]^3$ 与 $f(x+h)-f(x)$ 的关系, 并利用函数 f 的连续性而得到证实 (或者更简单地由关于复合函数的导数的知识知若 $h(x_0)$ 存在, 且 $h(x_0)\neq 0$, 则 $[h(x)]^{1/3}$ 在 x_0 处的导数存在, 且等于 $h'(x_0)[h(x_0)]^{-2/3}/3$).

此外还需注意的是，即使在开区间 (a,b) 上 $f\neq 0$, 但总可设 $f(a)=0$ (由于 f 的连续性以及 $f(0)=0$). 而微分方程的初值问题

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{3}(f(x))^{-1}, & x\in(a,b), \\ f(a)=0 \end{cases}$$

中方程的右端并不满足保证解的唯一性的条件 (如， $1/(3y)$ 关于 y 在 $y=0$ 处并不满足 Lipschitz 条件), 因而要注意不要漏掉任何非平凡解.

解法 1 由原方程即得

$$\frac{\mathrm{d}[f(x)]^3}{\mathrm{d}x}=f(x), \qquad x\geq 0;\ 且\ f(0)=0. \tag{1}$$

显然，由此微分方程及初始条件，经过积分即得原方程. 因此，求原方程的连续函数解等价于求 (1) 的连续函数解.

现证，若 $f(x)\neq 0$, $x>0$, 则 $f'(x)$ 存在.

事实上，由于

$$\begin{aligned} &[f(x+h)]^3-[f(x)]^3 \\ =\ &[f(x+h)-f(x)]\cdot\{[f(x+h)]^2+f(x+h)f(x)+[f(x)]^2\}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ =\ &\frac{[f(x+h)]^3-[f(x)]^3}{h}\cdot\{[f(x+h)]^2+f(x+h)f(x)+[f(x)]^2\}^{-1}. \end{aligned}$$

由于 $f\in C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$ 及 $f(x)\neq 0$, 因而

$$\lim_{h\to 0}\{[f(x+h)]^2+f(x+h)\cdot f(x)+[f(x)]^2\}=3[f(x)]^2\neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} \\ =\ &\lim_{h\to 0}\left\{\frac{[f(x+h)]^3-[f(x)]^3}{h}\right. \\ &\left.\cdot\{[f(x+h)]^2+f(x+h)\cdot f(x)+[f(x)]^2\}^{-1}\right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)]^3-[f(x)]^3}{h}$$
$$\cdot\left\{\lim_{h\to 0}\{[f(x+h)]^2+f(x+h)\cdot f(x)+[f(x)]^2\}\right\}^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}[f(x)]^3}{\mathrm{d}x}\cdot[f(x)]^{-2} = \frac{1}{3}f(x)[f(x)]^{-2} = \frac{1}{3}[f(x)]^{-1},$$

即 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x) = [f(x)]^{-1}/3$, 或者写为 $2f(x)f'(x) = 2/3$. (更简单些，可令 $g(x) = [f(x)]^3$, 则 $f(x) = [g(x)]^{1/3}$, 且 $f(x) \neq 0 \iff g(x) \neq 0$. 由于 $g'(x)$ 存在，由复合函数导数的结论即知 $f(x) = [g(x)]^{1/3}$ 的导数存在，且 $f'(x) = [g(x)]^{-2/3}g'(x)/3 = [f(x)]^{-2}([f(x)]^3)'/3 = [f(x)]^{-1}/3$.)

现假设存在 $x_0 > 0$, 使 $f(x_0) \neq 0$. 不妨设 $f(x_0) > 0$. 由于 $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$, 且 $f(0) = 0$, 不妨设存在 $a \in [0, x_0)$, 使得 $x \in (a, x_0]$ 时 $f(x) > 0$, 而 $f(a) = 0$. 因此，或者 (i) 存在 $b > x_0$, 使得当 $x \in [x_0, b)$ 时 $f(x) > 0$, 而 $f(b) = 0$; 或者 (ii) 对任何 $x \in [x_0, +\infty)$, $f(x) > 0$.

现证情形 (i) 不出现．事实上，由于在 (a, b) 中 $f \neq 0$, 因而 f' 存在，且 $2f(x)\cdot f'(x) = 2/3$, $x \in (a, b)$. 因此 $[f(x)]^2 = 2(x-c)/3$, $x \in (a, b)$, 其中 c 为常数．由连续性得 $[f(x)]^2 = 23(x-c)$, $x \in [a, b]$. 由 $f(a) = 0$ 得 $c = a$; 由 $f(b) = 0$ 得 $c = b$. 但 $a < b$, 得矛盾.

因此在 $[a, +\infty)$ 中 $[f'(x)]^2 = 2(x-a)/3$. 由于在 $(a, +\infty)$ 中 $f > 0$, 因此 $f(x) = \sqrt{2(x-a)/3}$, $x \geq a$.

由上述推理亦可得：若 $a > 0$, 则在 $[0, a]$ 中 $f(x) \equiv 0$. (显然在 $[0, a]$ 中 $f(x) \equiv 0$ 满足 (1).)

这样，对任何 $a \geq 0$, 函数

$$f_a^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{若}\ 0 \leq x \leq a, \\ \sqrt{2(x-a)/3}, & \text{若}\ x > a \end{cases}$$

即为 (1) 的连续函数解.

若设存在 $x_0 > 0$, 使 $f(x_0) < 0$, 则类似可得对任何 $a \geq 0$, 函数

$$f_a^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{若}\ 0 \leq x \leq a, \\ -\sqrt{2(x-a)/3}, & \text{若}\ x > a \end{cases}$$

亦为 (1) 的连续函数解.

综上所述，题中积分方程的所有连续函数解为：

$$f(x) \equiv 0; \qquad f_a^+, f_a^-, \forall a \geq 0.$$

说明 1 容易知道 f_a^+, f_a^- 在 $x = a$ 处确实无导数，因而它们不是可微函数，只是连续函数.

分析 2 解法 1 中把关于 f 的积分方程化为关于 f 的等价的微分方程的初值问题时遇到 f 是否可微的问题 (由于所求者 f 是连续函数，未必在每一点可微). 然而由原方程知，若令 $g(x) = [f(x)]^3$, 则由于 $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$, 因此 $g \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$. g 与 f 函数值之间的关系是一对一的，能求得 g, 即可求得 f. 因而可先把原问题化为关于 g 的等价的微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} g'(x) = [g(x)]^{1/3}, & x \geq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

类似于分析 1 中所指出的，此问题中方程的右端不满足保证解的唯一性的条件 (如，$y^{1/3}$ 在 $y = 0$ 处不满足 Lipschitz 条件), 因而也不要漏掉非平凡解.

解法 2 令 $g(x) = [f(x)]^3$, 则由原方程知

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \geq 0.$$

由于 $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$, 所以 $g \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$. 又 $f(x) = [g(x)]^{1/3}$, $g(0) = 0$, 对上面方程的两端求导，得

$$\begin{cases} g'(x) = [g(x)]^{1/3}, & x \geq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

显然，$g(x) \equiv 0$ 为问题 (2) 的 C^1 解.

现设 $g(x) \not\equiv 0$, 即存在 $x_0 > 0$, 使 $g(x_0) \neq 0$. 不妨设 $g(x_0) > 0$. 由于 $g \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ 及 $g(0) = 0$, 所以存在 $a \in [0, x_0)$, 使得 $g(a) = 0$, 且对任何 $x \in (a, x_0]$, $g(x) > 0$. 此时，或者 (i) 存在 $b > x_0$, 使得 $g(b) = 0$, 且对任何 $x \in [x_0, b)$, $g(x) > 0$; 或者 (ii) 对任何 $x \in [x_0, +\infty)$, $g(x) > 0$.

现证情形 (i) 不出现. 事实上，在 (a, b) 中对 $g'(x) = [g(x)]^{1/3}$ 求积，得

$3[g(x)]^{2/3}/2 = x + c$, 其中 c 为常数. 由于在 (a,b) 中 $g > 0$, 因此

$$g(x) = \left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{3/2}, \qquad x \in (a,b).$$

由 g 的连续性, 令 $x = a$, 得 $c = -a$. 因此

$$g(x) = \left[\frac{2}{3}(x-a)\right]^{3/2}, \quad x \in (a,b).$$

当 $x = b$ 时即得矛盾式:

$$0 = g(b) = \left[\frac{2}{3}(b-a)\right]^{3/2}.$$

因此情形 (i) 不出现.

上述推理也证明了在 $[a,+\infty)$ 中

$$g(x) = \left[\frac{2}{3}(x-a)\right]^{3/2}, \qquad 若\ g(x_0) > 0,$$

或者

$$g(x) = -\left[\frac{2}{3}(x-a)\right]^{3/2}, \qquad 若\ g(x_1) < 0,$$

以及在 $[0,a]$ 中 $g(x) \equiv 0$ (若存在 $x_1 \in (0,a)$, 使 $g(x_1) \neq 0$, 则在 $[x_1,+\infty)$ 中 $g(x) \neq 0$, 与 $g(a) = 0$ 矛盾). 因此, 问题 (2) 的一切连续可微解为

$$g(x) \equiv 0;$$

$$g_a^+(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \left[\dfrac{2}{3}(x-a)\right]^{3/2}, & x > a; \end{cases}$$

$$g_a^-(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ -\left[\dfrac{2}{3}(x-a)\right]^{3/2}, & x > a, \end{cases}$$

其中 $a \geq 0$ 为任意非负数.

因此，原问题的一切连续函数解为

$$f(x) \equiv 0;$$

$$f_a^+(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ \sqrt{\frac{2}{3}(x-a)}, & x > a; \end{cases}$$

$$f_a^-(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a, \\ -\sqrt{\frac{2}{3}(x-a)}, & x > a, \end{cases}$$

其中 $a \ge 0$ 为任意非负数.

说明 2 如果对题中所给的积分方程求属于 $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}_+})$ 的解，则只有 $f_0^+(x) = \sqrt{2x/3}$, $f_0^-(x) = -\sqrt{2x/3}$ 及 $f(x) \equiv 0\,(x \ge 0)$ 这 3 个解. 而若要求属于 $C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ 的解，则只有唯一解 $f(x) \equiv 0\,(x \ge 0)$ 了.

8.2.2 设 f, g 为闭单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ 上的解析函数，且在单位圆周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上适合条件

$$|f+g| < |f| + |g|.$$

试证：对任意非负实数 λ, 函数 $f - \lambda g$ 在单位圆内 (即 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$) 的零点个数与 f 及 g 在单位圆内的零点个数都相同.

证明 由条件可知在单位圆周上 f 及 g 都没有零点，且对任意非负实数 λ, $f - \lambda g$ 也没有零点. 由 Roche 定理可知 $f - \lambda g$ 在单位圆内之零点个数为

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(f-\lambda g)'}{f - \lambda g}\,\mathrm{d}z.$$

考虑在上半直线 $0 \le \lambda$ 上之复值函数 $I(\lambda)$. 由 Roche 定理可知它是取非负整数值之函数，另一方面，显然它是 λ 的连续函数. 因此证明了 $I(\lambda) = I(0)$, 其中

$$I(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z,$$

即为 f 在单位圆内之零点个数. 这证明了 $f - \lambda g$ 和 f 在单位圆内有相同零点数.

设 $\lambda \ge 1$, 记 $\mu = 1/\lambda$, 于是 $0 < \mu \le 1$, 且同理考虑函数 $g - \mu f$, 于是

$$\widetilde{I}(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(g-\mu f)'}{g - \mu f}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(g-f/\lambda)'}{g - f/\lambda}\,\mathrm{d}z = I(\lambda)$$

为常数，即 $\widetilde{I}(\mu)=\widetilde{I}(0)$ (显然 $\widetilde{I}$ 在 0_+ 处连续)，这证明了

$$I(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{g'}{g}\,\mathrm{d}z.$$

所以 g 在单位圆内之零点个数也等于 $f-\lambda g\,(\lambda\geq 1)$ 之零点个数，从而等于 f 在单位圆内之零点个数. 证毕.

8.2.3 Dirichlet 函数 $D(x)$ 是不是某个连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限？请证明你的断言.

(注： Dirichlet 函数 $D(x)$ 定义如下：

$$D(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时;}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时.})\end{cases}$$

分析 从微积分的教程中知道， Dirichlet 函数 $D(x)$ 可表为一个有两个指标的连续函数列的两次极限：

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m(n!\pi x).$$

但是否能表为 $D(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,(f_n\in C^0(\mathbb{R}))$ 呢？实变函数论中有这样的 (A. Lebesgue) 定理：

在 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 可表为一个连续函数列 $\{f_n\}$ 的极限的充要条件是对于任一实数 A, 集合 $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)>A\}$ 和 $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<A\}$ 都是 F_σ 型集.

对于 Dirichlet 函数 $D(x)$ 而言，由于其值域只有两个数 0 和 1, 且在有理点取值 1, 在无理点取值 0, 而有理点全体 $\mathbb{Q}$ 为 F_σ 型集，因而 $D(x)$ 是否为连续函数列的极限取决于无理点全体 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 是否为 F_σ 型集. 由实变函数论的知识不难知道后者的答案是否定的.

因而我们可设法直接证明：若 $D(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 其中 $f_n(x)\,(n=1,2,\ldots)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，则 $\mathbb{R}$ 上所有无理数的集合 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 为 F_σ 型集；再证明事实上 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 不是 F_σ 型集，即得矛盾. 因而可证明 $D(x)$ 不是连续函数列的极限.

解 我们断言，不存在 $f_n\in C^0(\mathbb{R})$, $n=1,2,\ldots$, 使得 $D(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

先证一引理.

引理 $\mathbb{R}$ 上所有无理数的集合 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 不是 F_σ 型集.

引理的证明 设 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 是 F_σ 型集，即存在闭集 F_n, $n=1,2,\ldots$, 使得 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 每一 F_n 为无理数集 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 的闭子集, 所以 $O_n=\mathbb{R}-F_n\neq\emptyset$, 且 $\mathbb{Q}\subset O_n$, $n=1,2,\ldots$. 记 $\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$, 则 $\mathbb{R}=(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\})\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)$. 对 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$, 记 $I(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 则可取 $I(a_1,2\varepsilon_1)\subset O_1$, 且 $r_1\notin I(a_1,2\varepsilon_1)$. 由于 $\mathbb{Q}\subset O_2$, 所以开集 $I(a_1,\varepsilon_1)\cap O_2\neq\emptyset$. 取 $I(a_2,2\varepsilon_2)\subset I(a_1,\varepsilon_1)\cap O_2$, 使 $r_2\notin I(a_2,2\varepsilon_2)$. 由归纳作法，可得 $I(a_n,2\varepsilon_n)$, $n=1,2,\ldots$, 满足

$$I(a_1,2\varepsilon_1)\subset O_1,\ r_1\notin I(a_1,2\varepsilon_1)$$
$$I(a_{n+1},2\varepsilon_{n+1})\subset I(a_n,\varepsilon_n)\cap O_{n+1},$$
$$r_{n+1}\notin I(a_{n+1},2\varepsilon_{n+1}),\ n=1,2,\ldots.$$

因此 $I(a_n,2\varepsilon_n)\cap(F_l\cup\{r_l\})=\emptyset$, $l=1,2,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$; 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$, 并且存在 $a\in\mathbb{R}$, 使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}I(a_n,2\varepsilon_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{I(a_n,2\varepsilon_n)}=\{a\}.$$

另一方面，由 $\{I(a_n,2\varepsilon_n)\}$ 的构造法可知

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty}I(a_n,2\varepsilon_n)&=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}I(a_n,2\varepsilon_n)\right)\cap\mathbb{R}\\&=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}I(a_n,2\varepsilon_n)\right)\cap\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right)\right]=\emptyset,\end{aligned}$$

得矛盾. 因而引理得证.

现在来证明我们的论断. 设存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$, 使得

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

我们注意到 $D(x)=1$, 若 $x\in\mathbb{Q}$; $D(x)=0$, 若 $x\notin\mathbb{Q}$. 因此对于 $x_0\notin\mathbb{Q}$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 当 $n\geq n_0$ 时 $f_n(x_0)\leq 1/2$. 反之，若存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 当 $n\geq n_0$ 时 $f_n(x_0)\leq 1/2$, 则 $D(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)\leq 1/2$, 因此 $D(x_0)=0$, 即 $x_0\notin\mathbb{Q}$. 因此

$$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}\mid f_m(x)\leq 1/2\right\}\equiv\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}D_m,$$

其中 $D_m=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,f_m(x)\leq 1/2\right\}$ 由于 f_m 的连续性而为闭集. 记 $F_n=\bigcap_{m=n}^{\infty}D_m$, 则 F_n 作为闭集之交亦为闭集，$n=1,2,\ldots$. 因此 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$

为 F_σ 型集，即 $\mathbb{R}$ 上所有无理数的集合为 F_σ 型集，与引理矛盾．这就证明了 $D(x)$ 不是连续函数序列的极限．

说明 1. 这是一道与 Baire 的函数分类有关的问题．讨论在 $[a,b]$ 上定义的函数．一切连续函数所成之集称为 (在 $[a,b]$ 上的) 零类函数集，记作 H_0．函数 $f \notin H_0$，但可表示为

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall x \in [a,b], \tag{1}$$

其中 $f_n \in H_0$，$n = 1,2,\ldots$，则称 f 是第一类函数，记作 $f \in H_1$．

一般地，对于 $m \geq 2$，若于 $f \notin \bigcup_{i=0}^{m-1} H_i$，但存在 $\{f_n\} \subset H_{m-1}$，使得 (1) 成立，则称 f 是第 m 类函数，记作 $f \in H_m$．

这样，即归纳地定义了函数类

$$H_0, H_1, \ldots, H_m, \ldots.$$

还可继续分下去：设 $f \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$，但存在 $f_n \in H_{m_n}$，$n = 1,2,\ldots$，$\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$，使得 (1) 成立，则称函数 f 属于函数类 H_ω；$\ldots$．

上述讨论中的区间 $[a,b]$ 亦可代之以 $\mathbb{R}$．

这样，试题 8.2.3 的结论为：Dirichlet 函数 $D(x)$ 不是零类和第一类函数．而"分析"部分中所述的 Lebesgue 定理可叙述为：

$f \in H_0 \cup H_1$ 的充要条件是对于任一实数 A，集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > A\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < A\}$ 都是 F_σ 型集．

我们来证明其必要性部分．设 $f \in H_0 \cup H_1$，则存在 $\{f_n\} \subset H_0 = C^0(\mathbb{R})$，使得 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，$\forall x \in \mathbb{R}$．现证

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^{(k)}, \tag{2}$$

其中 $S_m^{(k)} = \bigcap_{n=m}^{\infty} F_n^{(k)}$，$F_n^{(k)} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \leq A - 1/k\}$．这样，由 f_n 的连续性知 $F_n^{(k)}$ 为闭集；作为闭集之交集，$S_m^{(k)}$ 亦为闭集．因而 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < A\}$ 为 F_σ 型集．

事实上，设 $x_0 \in \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < A\}$，则 $f(x_0) < A$．取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $f(x_0) + \varepsilon \leq A - 1/k$．由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ 知存在 $m \in \mathbb{N}$，当 $n \geq m$ 时有 $f(x_0) - \varepsilon < f_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$，因而 $f_n(x_0) < A - 1/k$，所以 $x_0 \in S_m^{(k)}$．另一方面，若对某个 $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ 有 $x_0 \in S_m^{(k)}$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ 显然可得 $f(x_0) \leq A - 1/k < A$．因而 (2) 成立．

而 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -f(x) < -A\}$, 且 $-f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[-f_n(x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 因此 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > A\}$ 亦为 F_σ 型集. 必要性证毕.

试题 8.2.3 的反证法中 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 表为 F_σ 型集的形式较 (2) 式简单, 其原因是前者利用了 Dirichlet 函数 $D(x)$ 的值域 $\{0,1\}$ 只有两个元素这一性质.

2. 令 $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m(n!\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. 由说明一知 $f_n \in H_1$ ($x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 时 $f_n(x) = 0$, 又 $f_n(2) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, 因此 $f_n \notin H_0 = C^0(\mathbb{R})$), 而

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m(n!\pi x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

且由试题 8.2.3 的结论知 $D(x) \notin H_0 \cup H_1$, 因而 $D(x) \in H_2$.

亦可把 $D(x)$ 表为

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

其中当 $x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ 时 $D_n(x) = 1$, 否则 $D_n(x) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. 显然 $D_n(x) \notin H_0$, 但容易知道 $D_n(x) \in H_1$ (请读者自行证明), 结合试题 8.2.3 的结论亦得 $D(x) \in H_2$.

3. "解" 中引理的证明证明了 $\mathbb{R}$ 不能表为可数个特殊的无处稠 (闭) 集之并. 实际上, 用类似的证法可以证明 $\mathbb{R}$ 不能表为可数个无处稠集之并, 即 $\mathbb{R}$ 是第 2 纲集. (关于 Baire 纲理论的简介, 请参阅 6.1.5 的说明部分.)

8.2.4 给定 $n \times n$ 实矩阵集合 M, 它适合条件

(a) $n \times n$ 单位矩阵 $E \in M$, $n \times n$ 零矩阵 $0 \notin M$;

(b) 若 $A, B \in M$, 则 $AB \in M$ 或 $-AB \in M$;

(c) 若 $A, B \in M$, 则 $AB = BA$ 或 $AB = -BA$;

(d) 若 $A \in M$, 且 $A \neq E$, 则存在 $B \in M$, 使得 $AB = -BA$.

试证: 集合 M 的元素个数不超过 n^3.

(提示: 设法用数学归纳法.)

分析 这是一道难题, 为了说明思路, 首先要指出的是, 第 4 个条件很特殊, 所以如何用好第 4 个条件是关键. 按标准程序, 首先考虑简单情形.

当 $n = 1$, 由 (d) 立即有 $M = \{1\}$, 所以 $|M| = 1 = 1^3$.

当 $n \geq 2$, 我们不用考虑 $M = \{E\}$ 的情形, 因为在这时, $|M| = 1 \leq n^3$. 所以我们假设 $M \neq \{E\}$. 这时一定有 $A \in M, A \neq E$. 由条件 (d), 还有 $B \in M$, $AB = -BA$. 于是 $B \neq E, A$. 因为如果 $B = E$ 或 A, 则有 $AB = BA$,

于是 $AB=0$. 由条件 (b), 0 或 $-0=0\in M$, 这和条件 (a) 矛盾. 所以 (A,B) 成对出现. 但是要注意, 若另有一个 $A_1\neq E,A,B$, 则有可能 A 或 B 与 A_1 反交换. 不过总之启发了我们先取定一对 (A,B) 来考虑, 再看 $|M|>3$ 时, 能不能用数学归纳法了. 能想到这点, 基本思路就已经有了. 但是在进行每一步时, 仍然有不少难点.

首先, 对取定的矩阵偶 (A,B), 自然想到的是它能不能变为标准形. 由于命题给的条件和结论都在相似下不改变. 这提醒我们用 Jordan 标准形. 但是 Jordan 标准形是复方阵上讨论的. 注意到两个实方阵若在复方阵下相似, 则必在实方阵下相似. 所以我们还要注意到我们所取之标准形为实方阵.

上面的想法仍有缺陷. 因为我们对方阵 A, 如果没有什么限制, 取一个一般的标准形, 再去决定和 A 交换 (即 $AB=BA$) 或反交换 (即 $AB=-BA$) 的方阵 B 极为困难. 这就建议我们进一步考虑条件, 以便找出 M 中矩阵是否还适合更强之条件, 从而使它的 Jordan 标准形具有最简单之形式: 对角形.

对方阵而言, 最自然的办法是考虑 $A,A^2,A^3,\ldots$. 现在我们开始给出证明.

证明 第 1 步. 设 $n\geq 2$, 且设 $|M|\geq 3$. (前面已指出, 或者 $|M|=1$ 或者 $|M|\geq 3$). 任取 $X\neq E, X\in M$. 由条件 (b), X^2 或 $-X^2$ 在 M 中. 记其中属于 M 的一个为 Y. 今任取 $Z\in M$, 则由条件 (c) 有 $XZ=\pm ZX$ (这里以及下面我们都这样来理解 $\pm$, 即或者取正号, 或者取负号). 不管那种情形, 我们都有 $X^2Z=X(XZ)=X(\pm ZX)=\pm(XZ)X=ZX^2$, 所以 X^2 和 Z 可交换, 因此 Y 和 Z 可交换. 设 $Y\neq E$, 由条件 (d), 存在一个 $Z\in M$, 使 $YZ=-ZY$, 这导出 $-ZY=YZ=ZY$, 因此 $ZY=0$, 这与条件 (a),(b) 矛盾. 所以证明了 $Y=E$. 即证明了: 任取 $X\in M$, 则有 $X^2=E$ 或者 $X^2=-E$.

(这第 1 步很重要, 因为它给出了很强的结论, 因此对计算集合 M 之个数起了决定性作用. 我们这道题, 是美国普南特数学竞赛 (即全美大学生数学竞赛)1992 年之最后一道试题. 那次参赛学生 2000 余人, 得名次者 200 余人. 此题评分标准为 10 分, 总共有两人得分, 评分为 3 分. 意思为作出这第 1 步! 我们中国科学院数学研究所 1994 年数学夏令营, 实质上是全国大学生数学竞赛. 参赛人 40 位, 此题评分标准为 25 分, 总共有两人得分, 评分为 10 分, 也是走出了这第 1 步. 为什么没有人能继续走下去, 原因在于他们虽然抓住了这一对 (A,B), 但忘了 $A^2=\pm E$ 使得 Jordan 标准形极为简单, 而是仍然用一般 Jordan 标准形, 以至于走不下去.)

第 2 步. 由 $|M|\geq 3$, 在 M 中取定一对元素 (A,B) 来讨论. 这里 $A,B\neq E$,

且 $AB=-BA$.

由 $A^2=\pm E$, $B^2=\pm E$ 可知 A 及 B 的极小多项式都具有形式 λ^2-1 或 λ^2+1, 因此 A 的初等因子都是一次的，所以 A,B 都相似于对角形，对角元取 ±1 或取 $\pm i$. 自然地分成 3 种情形

(i) A,B 之本征值都取 ±1;

(ii) A 的本征值取 ±1, B 的本征值取 $\pm i$;

(iii) $M\setminus\{E\}$ 中元之本征值都非实.

所以在相似意义下无妨取

(i), (ii) $$A=\begin{pmatrix} E_1^{(r)} & 0 \\ 0 & -E_1^{(n-r)} \end{pmatrix},$$

(iii) $$A=i\begin{pmatrix} E_1^{(r)} & 0 \\ 0 & -E_1^{(n-r)} \end{pmatrix}.$$

注意到 $A\neq E,-E,iE,-iE$ 之任一，所以必须 $0<r<n$.

这时 $AB=-BA$. 将 B 也按上面 $r,n-r$ 行，列分块，由 $AB+BA=0$ 立即可推出

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $B^2=\pm E$, 所以有 $\pm B_1B_2=E_1$, $\pm B_2B_1=E_2$. 这里正负号理解为同时取正或同时取负. 由此可推出 $r\leq n-r$, $n-r\leq r$. 因此 n 为偶数，且 $r=n/2$, $E_2=E_1$. 又 $B_2=\pm B_1^{-1}$. 再作相似

$$P=\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

便证明了 E,A,B 在相似意义下可取定为

i) $$E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix};$$

ii) $$E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix};$$

iii) $$E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} iE_1 & 0 \\ 0 & -iE_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 3 步．现在回过来讨论 M 可能包含

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} iE_1 & 0 \\ 0 & -iE_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & iE_1 \\ iE_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & iE_1 \\ -iE_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -iE_1 & 0 \\ 0 & iE_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -iE_1 \\ -iE_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -iE_1 \\ iE_1 & 0 \end{pmatrix}$$

时之最大集．（没有取 $-E, iE, -iE$ 是因为 $-E, iE, -iE$ 不可能包含在 M 中，否则与条件 (d),(a) 矛盾)．

下面来证明：在情形 (i), (ii) 中，集合 M 不出现后六个方阵．事实上，A, B 及含 i 之方阵 X 不能同时相似于实方阵．若不然，则存在二阶非异复方阵 P, 使

$$PAP^{-1} = \overline{P}A\overline{P}^{-1}, \quad PBP^{-1} = \overline{P}B\overline{P}^{-1}, \quad PXP^{-1} = \overline{P}\,\overline{X}\,\overline{P}^{-1}.$$

记 $Q = \overline{P}^{-1}P$, 有 $QA = AQ, QB = BQ$. 于是

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

从而由 $QX = \overline{X}Q$ 推出 $X = \overline{X}$, 这与 X 为非实方阵矛盾，于是 M 最大可能包含

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在情形 (iii)．如果 $M\backslash\{E\}$ 中有一个方阵具有实本征值，我们取它为 A, 因此化到情形 (i), (ii)．所以设 $M\backslash\{E\}$ 中本征值都非实．这时 M 最大可能包含

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iE_1 & 0 \\ 0 & -iE_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & iE_1 \\ iE_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -iE_1 & 0 \\ 0 & iE_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -iE_1 \\ -iE_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面考虑情形 $n=2$. 这时来证明: M 中不存在其它方阵 X. 事实上, 若有

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它与 A, B 交换或反交换. 因此由 $XA = \pm AX$ 知

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $XB = \pm BX$ 知 X 具有下面 4 种形式之一:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

但是 $X^2 = \pm E$, 这推出 $a \in \{1, -1, i, -i\}$. 至此证明了 $|M| \le 7 < 8 = 2^3$.

第 4 步. 为了化为可用归纳法之情形. 我们需要继续决定 M 中元素的形式.

当 $|M| = 3 \le n^3 (n \ge 2)$ 时已不用证. 设 $|M| > 3$. 我们任取一元 $X \in M \backslash \{E, A, B\}$. 将 X 和 A 一样分块, 由 $AX = XA$ 或 $AX = -XA$ 可知 X 形如

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

之一. 由 $BX = XB$ 或 $BX = -XB$ 可知 X 形如下面 4 种方阵之一, 它们是

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Y \\ -Y & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 E, A, B 都具有这种形式. 所以可以说 M 中元都具有上面 4 种形式之一. 且有

a) 在情形 (i) 及 (ii), $Y = E_1$ 至多 4 个; $Y = -E_1$ 至多 3 个, 又 $Y \ne \pm iE_1$;

b) 在情形 (iii), $Y = E_1$ 恰有两个; $Y = -E_1$ 至多一个; $Y = iE_1$ 至多两个, $Y = -E_1$, 也至多两个.

另一方面, 每给一个 M 中元 X, 就唯一决定了 Y, 当 X 遍历 M 时, 所有这些 Y 构成集合 M_0(相同的只算一次). 注意到我们希望造出集合 M_1 仍适

合命题之条件，所以在 M_0 中要除去 $Y=-E_1, iE_1, -iE_1$ 相应之方阵，这样构成集合 M_1. 显然在情形 (i) 及 (ii), 由 a) 可知

$$4|M_1|+3 \geq |M|;$$

在情形 (iii), 由 b) 可知

$$4|M_1|-2+5 \geq |M|.$$

总之有

$$4|M_1|+3 \geq |M|.$$

如果 M_1 仍适合命题条件，则由归纳法假设有 $|M_1| \leq (n/2)^3$, 于是当 $n \geq 2$ 时

$$|M| \leq 4\left(\frac{n}{2}\right)^3+3=\frac{1}{2}n^3+3 \leq n^3,$$

这便证明了命题.

第 5 步. 这最后一步为证明 M_1 适合命题要求.

(i) $n=2, r=1$. 由第 3 步最后证明可知 $M_1=\{E_1\}$, 自然适合命题要求.

(ii) $n>2$. 由 M_0 及 M_1 之定义可知 $E_1 \in M_1, 0 \notin M_1$, 即条件 (i) 成立.

(iii) $n>2$. 若 $Y, Z \in M_1$, 于是在 M 中存在

$$U=\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Y \\ -Y & 0 \end{pmatrix}$$

之一，且在 M 中存在

$$V=\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & -Z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z & 0 \end{pmatrix}$$

之一，使得 $UV \in M$ 或 $-UV \in M$, 于是立即有 YZ 或 $-YZ \in M_0$. 当 $YZ=-E_1$ 或 $-YZ=-E_1$ 时便有 $-YZ=E_1 \in M_1$ 或 $YZ=E_1 \in M_1$; 当 $YZ=\pm iE_1$ 时，则有 $Z=\pm iY^{-1}$, 且 $iE_1 \in M_0$ 或 $-iE_1 \in M_0$. 这时为情形 (iii). 这时，若作相似 P, 使 $PAP^{-1}=A, PBP^{-1}=B$, 则有

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

由 $U \to PUP^{-1}, V \to PVP^{-1}$ 导出 $Y \to P_1YP_1^{-1}, Z \to P_1ZP_1^{-1}$. 由 $Z=\pm iY^{-1}$, 它们不能同时相似于实方阵. 所以这种情形不出现. 至此证明了 M_0 适合条件 (b).

(iv) 条件 (c) 显然成立.

(v) 最后对集合 M_0 验证条件 (d). 事实上，若任取 $Y \in M_0 \backslash \{E_1\}$, Y 由 M 中元 U 决定. 如果

$$U = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix},$$

考虑 AU, 则有

$$AU = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} iY & 0 \\ 0 & iY \end{pmatrix}.$$

如果

$$U = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ \pm Y & 0 \end{pmatrix},$$

考虑 BU, 则

$$BU = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}.$$

总之，证明了下列元素之一在 M 中：

$$U_0 = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -Y & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iY & 0 \\ 0 & iY \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iY & 0 \\ 0 & -iY \end{pmatrix}.$$

当然 $Y \neq E_1, -E_1$. 所以在 M 中存在元素 V_0, 使它和上述 4 元素之一有 $U_0V_0 = -V_0U_0$. 记 V_0 决定 $Z \in M_0$, 则有 $YZ = -ZY$.

注意到 U_0 和 $E_1, -E_1, iE_1, -iE_1$ 决定之 M 中元素必可交换. 这证明了 $Z \neq E_1, -E_1, iE_1, -iE_1$. 所以 $Z \in M_1$. 因此条件 (d) 对矩阵集合 M_1 仍成立.

至此完全证明了这个命题.

编辑手记

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室致力于数学竞赛与数学文化的传播与普及，数学竞赛的高端是大学生数学竞赛，如著名的美国普特南数学竞赛，中国科学院数学研究所主办的中国大学生数学夏令营可称是中国版的普特南竞赛．试题均出自名家之手，构思巧妙，背景深刻，为全国大学师生所瞩目．其历届获奖者中有些已成长成为杰出的青年数学家．如代数几何学家扶磊等，首先感谢德高望重的王元院士及杨乐院士为本书所做的精彩序言，也感谢许以超研究员与陆柱家研究员的认真编写及整理．需要指出的一点是本书的排版与编辑加工都是在《数学译林》编辑部内部进行的．所执行的标准同于国际数学界流行标准，与现行出版标准的微小差异如下：e，i 的正斜体及积分符号的正斜体，参加工作的人员是：录入——李世蓉，排版——李春英，作图——樊建荣，校对——李世蓉．

出版社李广鑫编辑对文稿进行了审读，并重新绘制了全部插图．

在文稿中关于向量及矩阵符号的黑白体问题，我们充分听取了作者的意见．特别是在著名数学家许以超先生的坚持下，向量及矩阵符号没有使用黑体，请读者阅读时留意．

刘培杰

2007 年 3 月